| | |
|---|---|
| Classe: TS2ET Date: 10/09/2012 | <u>**type:**</u> **Devoir maison**<br>pour le 24/9/2012 |
| **<u>Devoir de mathématiques n° 1</u>** | |
| thème: Équations différentielles | |

## <u>Exercice 1</u>

Soit l'équation différentielle (E): $tx'(t) - 2x(t) = t$.

1°) Résoudre l'équation différentielle (E).

2°) Déterminer la solution x de (E) qui vérifie x(1)=2.

## <u>Exercice 2</u>

On considère les équations différentielles:

(E) $x'' - 2x' + 2x = 0$ et

(E′) $x'' - 2x' + 2x = 2t^2 - 4t + 4$.

où x est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivables sur „ x′ la fonction dérivée de x et x″ la fonction dérivée seconde de x.

1°) Résoudre l'équation différentielle (E).

2°) Déterminer des nombres réels a, b et c tels que la fonction g, définie sur , par

$g(t) = at^2 + bt + c$ soit une solution particulière de (E′).

3°) Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E′).

Corrigé du devoir



**Exercice 1 (10 points=2,5+2,5+1+l 1+3)**

1°) <u>Résolution de l'équation (E): tx'(t)-2x(t)=t</u> (2,5+2,5+1+(1))

•**<u>Equation sans second membre</u>**: $tx'(t)-2x(t)=0$.

D'après le formulaire, les solutions s'écrivent:

$x_0(t)=ke^{-G(t)}$ où $G(t)$ est une primitive de $t \longmapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}=\dfrac{-2}{t}$.

Donc $G(t)=-2\ln(t)$.

Ainsi: $\boxed{x_0(t)=ke^{2\ln(t)}=ke^{\ln(t^2)}=kt^2}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

•**<u>Recherche d'une solution particulière de (E).</u>**

On la cherche sous la forme:

$x_1(t)=at+b$

$x_1'(t)=a$

Donc $tx_1'(t)-2x_1(t)=t\times a-2(at+b)=-at-2b$

Ainsi $x_1(t)$ est solution $\Leftrightarrow \begin{cases} -a=1 \\ -2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$.

conclusion: $\boxed{x_1(t)=-t}$ est solution particulière.

•**<u>Conclusion finale:</u>** La solution générale de l'équation différentielle complète est:

$\boxed{x(t)=x_0(t)+x_1(t)=kt^2-t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2°) <u>Déterminons la solution x de (E) qui vérifie: x(1)=2.</u> (3 pts)

Comme x est une solution, $x(t)=kt^2-t$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Or $x(1)=2 \Leftrightarrow k-1=2 \Leftrightarrow k=3$.

**<u>Conclusion:</u>** La fonction cherchée est: $\boxed{x(t)=3t^2-t}$.

**Exercice 2 (10 points=4+4+2)**



1°) <u>Résolution de l'équation (E):</u> $x''-2x'+2x=0$.

C'est une équation du 2ième ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est: $r^2-2r+2=0$.

$\Delta=b^2-4ac=4-4\times1\times2=-4=(2i)^2$.

Il y a donc deux solutions complexes conjuguées:

$r_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$ ; $r_2=1+i$.

Donc d'après le formulaire, la solution générale de (E) s'écrit ($\alpha=1$; $\beta=1$):

$\boxed{x_0(t)=(\lambda\cos(t)+\mu\sin(t))e^t}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$.

2°)

$\begin{cases} g(t)=at^2+bt+c \\ g'(t)=2at+b \\ g''(t)=2a \end{cases}$

Donc $g''(t)-2g'(t)+2g(t)=2at^2+(2b-4a)t+2a-2b+2c$

Ainsi g(t) est solution de (E')

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2b-4a=-4 \\ 2a-2b+2c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$.

**<u>Conclusion:</u>** $\boxed{g(t)=t^2+1}$ est une solution particulière de (E').

3°) D'après les deux question précédentes, l'ensemble des solutions sont les fonctions:

$\boxed{x(t)=(\lambda\cos(t)+\mu\sin(t))e^t+t^2+1}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$.