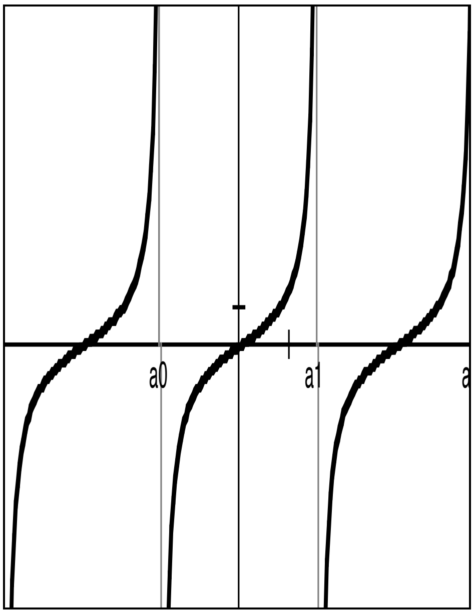
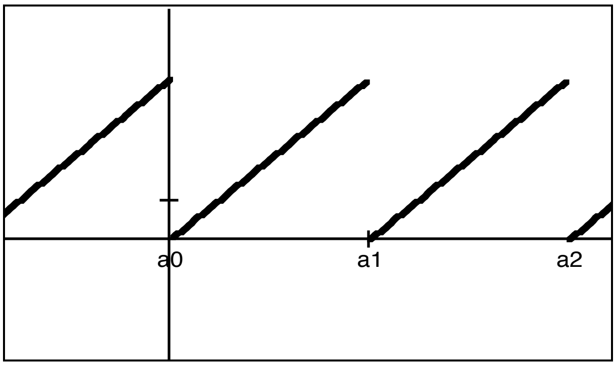
Séries de Fourier.

1°) Conditons de Dirichlet.

Une fonction f définie sur , périodique de période T, satisfait aux conditions de Dirichlet si elle est continue et admet une dérivée f' continue sur l'intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points sur une période en lesquels f ou f' admettent une limite à gauche et une limite à droite.

On dit encore que la fonction f est de classe C^1 par morceaux.

Exemples:

	
La fonction ci-dessus n'est pas de classe C^1 par morceaux car sur l'intervalle $\left[a_0;\ a_1\right]$ car elle n'a pas de limite finie en a_0^+ ni en a_0^-.	La fonction ci-dessus est de classe C^1 par morceaux car sur tous les intervalles $\left[a_i;\ a_{i+1}\right]$ elle est de classe C^1.

2°) Utilités des séries de Fourier.

Faisons un peu de physique et rappelons brièvement les bases du développement d'une fonction en série de Fourier. Examinons l'exemple des sons. Parmi l'ensemble des sons que nous entendons il en existe deux sortes: les bruits et les sons périodiques. Contrairement aux bruits, les sons de la musique ou du langage parlé présentent un caractère périodique, même si cette période est longue et l'allure de la courbe compliquée. On distingue ici une forme qui se répète de nombreuses fois: il sera donc possible de dégager un temps T (la période) au bout duquel le signal se répètera identique à lui-même.

Fourier a démontré que tout signal périodique peut être considéré comme une combinaison (dans des proportions adéquates) d'oscillations sinusoidales de fréquences F_0, $2F_0$, $3F_0$... La somme de ces signaux, oscillant à la fréquence fondamentale (F_0) à la fréquence double ($2F_0$), à la fréquence triple ($3F_0$,)... permet de reconstituer le signal initial.

Le signal de fréquence $2F_0$, est appelé l'harmonique 2, celui de frequence $3F_0$, l'harmonique 3... Ainsi, si x(t) représente l'amplitude du signal en fonction du temps, x(t) pourra s'écrire comme la somme d'un certain nombre de fonctions sinusoidales

C'est à dire que toute fonction périodique peut s'écrire sous la forme:

$$x(t) = a_0 + \underbrace{(\ a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)\ )}_{\substack{\text{Le fondamental} \\ \text{ou harmonique de rang 1}}} + \underbrace{(\ a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t)\ )}_{\text{harmonique de rang 2}} + \ . . .$$

Rappelons que a_0 représente la valeur moyenne de la fonction x(t).

Ainsi, n'importe quelle fonction périodique peut être reconstituée grâce à cette décomposition en série de Fourier.

Le problème est maintenant de calculer la valeur des coefficients.

3°) Coefficients de Fourier d'un signal périodique.

Pour tout entier n >0; en posant $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ on a :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)dt \\ a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt \quad \text{(valeur moyenne)} \end{cases}$$

L'intervalle d'intégration $[a\,;a+T]$ est choisi de façon à faciliter le calcul; on prend en général a=0 ou a=-T/2.

Remarque : **Si f est paire: $b_n=0$ pour tout n**

et $a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ et $a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t).\cos(n\omega t)dt$

Si f est impaire: $a_n=0$ pour tout n. et $b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t).\sin(n\omega t)\,dt$

Coefficients de Fourier complexe : On pose pour tout entier relatif (donc aussi négatif) :

$c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)e^{-in\omega t}dt$ où i est le nombre complexe de module 1 est d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

4°) Série de Fourier de f.

On définit la série de Fourier de f par:

$$\mathcal{F}(f)(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$$
$$= a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \ \ldots$$

Théorème: Si f est une fonction périodique de période T, de classe C^1 par morceaux ; alors la série de Fourier de f converge et on sa somme est donnée par :

Si f est continue en t_0 alors : $\mathcal{F}(f)(t_0) = f(t_0)$

Si t_0 est un point de discontinuité de f alors : $\mathcal{F}(f)(t_0) = \dfrac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$

Remarque1: Avec les coefficients de Fourier complexe on a:

$$\mathcal{F}(f)(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Remarque2: Lorsque la série de Fourier de f converge vers f(t) on dit aussi que f est développable en série de Fourier et on a:

$$f(t) = a_0 + (\ a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)\ ) + (\ a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t)\ ) + \ ...$$

$$f(t) = a_0 + \qquad u_1(t) \qquad + \qquad u_2(t) \qquad + \ ...$$

f (périodique de période T) est donc la somme :

- d'un terme a_0 qui est la valeur moyenne de f sur une période;
- d'une infinité de fonctions sinusoidales :
  - $u_1(x)$ est de période T et s'appelle le fondamental.
  - $u_n(x)$ sont les harmoniques de rang n ($n \geq 2$).

5°) Egalité de Parceval:

Si la série de Fourier de f converge alors

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = a_0^2 + \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + \ ...)$$

c'est à dire : (énergie de f) = Somme des énergies des harmoniques.