III- Fonction associées u+k, k.u, $\sqrt{(u)}$ et $\frac{1}{u}$.

1°) Somme et produit de deux fonctions.

Si u et v sont deux fonctions définies sur un intervalle I, on définit :

- La somme u+v, définie sur I par : $u+v : x \longmapsto u(x)+v(x)$
- La produit uv, définie sur I par : $uv : x \longmapsto u(x).v(x)$

Remarque importante :

Si on connait le sens de variation de u et de v sur I, **on ne peut pas** en général en déduire le sens de variation de u+v et de uv !

Exemples : Complétez les tableaux suivants :

Fonctions	u	v	u+v
expression	u(x)=3x	v(x)=-6x+3	u(x)+v(x)=
Variations et justification			

Fonctions	u	v	u+v
expression	u(x)=3x	v(x)=-x+2	u(x)+v(x)=
Variations et justification			

On remarque que dans chacun des deux cas :

la fonction u est ______________.

la fonction v est ______________.

En revanche :

dans le premier cas u+v est _________________.

dans le deuxième cas u+v est _________________.

Mais si une des deux fonctions est constante, on pourra énoncer des résultats.

2°) Fonction u+k.

Soit u une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel quelconque :
La fonction f définie sur I par : $f(x)=u(x)+k$ a le même sens de variation que u sur I.

démonstration :

cas 1 : si u est croissante sur I :

cas 2 : si u est décroissante sur I :

3°) **Fonction k.u**.

Soit u une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel quelconque :
On note f la fonction définie sur I par : $f(x)=k.u(x)$
-Si $k > 0$ alors f a le même sens de variation que u sur I.
-Si $k < 0$ alors f a le sens de variation contraire à celui de u.

démonstration :

cas 1 : si u est croissante sur I :

cas 2 : si u est décroissante sur I :

4°) Fonction $\sqrt{(u)}$

Soit u une fonction strictement monotone sur un intervalle I :
Si pour tout x de I, $u(x) \geqslant 0$, alors la fonction $\sqrt{(u)}$ est définie sur I et elle a le même sens de variation que u sur I.

démonstration :

cas 1 : si u est croissante sur I :

cas 2 : si u est décroissante sur I :

5°) <u>Fonction</u> $\frac{1}{u}$

Soit u une fonction strictement monotone sur un intervalle I :

La fonction $\frac{1}{u}$ est définie pour tout x de I tel que $u(x) \neq 0$.

Si pour tout x de I, $u(x) > 0$, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur I et elle a le sens de variation contraire de celui de u sur I.

Si pour tout x de I, $u(x) < 0$, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur I et elle a le sens de variation contraire de celui de u sur I.

démonstration :

cas 1 : si u est croissante sur I et $u(x) > 0$ sur I:

cas 2 : si u est décroissante sur I et $u(x) > 0$ sur I:

On fait de même en supposant $u(x) < 0$ sur I

IV- Étude de signe.

A- Le problème

1°) Exemple

Soit la fonction f définie par: $f(x)=x^3-4x^2-4x+16$.

f(-3)=

Donc pour x=-3, f(x) est ______________

f(-1)=

Donc pour x=-1, f(x) est ______________

f(3)=

Donc pour x=3, f(x) est ______________

f(5)=

Donc pour x=5, f(x) est ______________

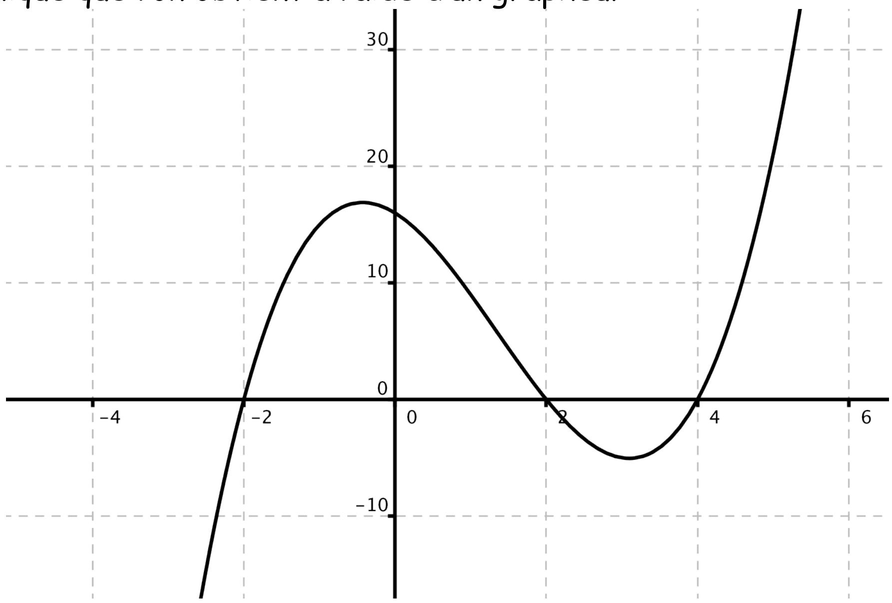
Étudier le signe de f signifie déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.
On présente, en général, ce signe sous forme d'un tableau qu'on appelle tableau de signe (Voir 2°)

2°) Aspect graphique:

On peut utiliser une calculatrice graphique ou un grapheur pour donner le signe d'une fonction.
Reprenez l'exemple précédent: $f(x)=x^3-4x^2-4x+16$.

A l'aide d'une calculatrice graphique (En représentant la fonction f), donner le tableau de signe de f(x) en fonction de x.

Voici le graphique que l'on obtient à l'aide d'un grapheur:



Le tableau de signe de f(x) est donc le suivant :

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Attention, cette méthode graphique ne constitue pas une démonstration (mais elle peut être utile pour vérifier un tableau de signe).

<u>B- Méthodes algébriques</u>

<u>1°) Signe d'une fonction affine</u>

<u>Rappels</u>: f est une fonction affine si et seulement si f(x)=ax+b avec a et b deux réels. Dans ce cas la représentation graphique de f est la droite d'équation y=ax+b.

On remarque aussi que la fonction f s'annule pour $x=-\frac{b}{a}$.

En effet: $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$

D'où le signe des fonctions affines

si a>0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

si a<0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Exercice: Dresser le tableau de signe de:
a) $f(x)=3x-4$
b) $g(x)=-2x+6$

✂---
-

2°) Signe d'un produit

Lorsqu'une fonction se présente sous forme d'un produit de deux ou plus d'expressions dont on connaît le signe (Par exemple des fonctions affines)., alors on étudie le signe de chaque facteur et on place ces résultats dans les lignes d'un tableau de signe pour en déduire le signe du produit à l'aide de la règle des signes.

Exercice: Dresser le tableau de signe de la fonction $h(x)=(2x+3)(x-3)$

✂---
-

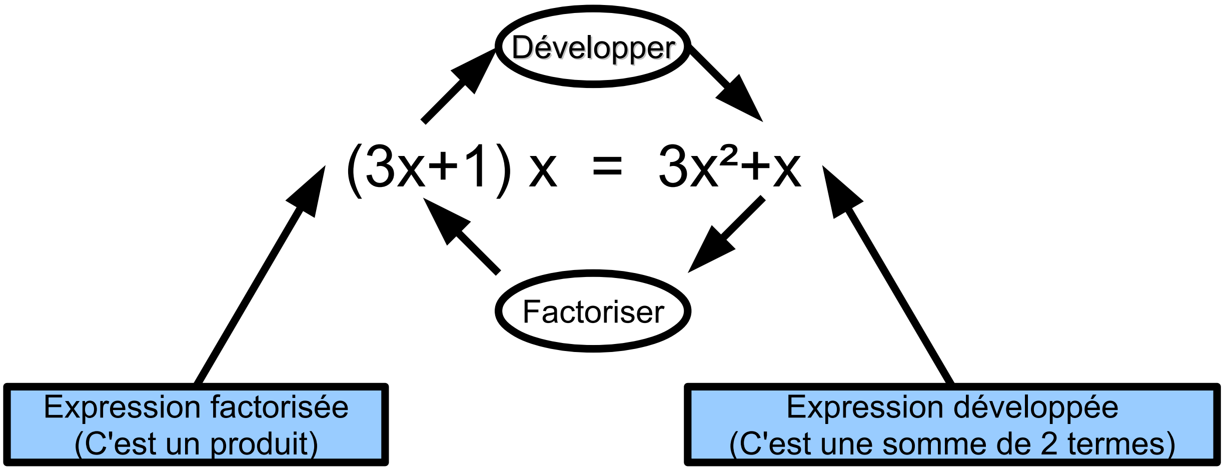
3°) Signe d'autres expressions

Lorsque la fonction se présente comme une somme de deux nombres positifs alors on sait qu'elle est positive. Par exemple $f(x)=x^2+3$.
Losque la fonction est une somme de fractions, on réduit la fraction au même dénominateur et on étudie le signe du numérateur et du dénominateur en plaçant tous les résultats dans un tableau de signe pour en déduire le signe de la fraction.

Exercice: Dresser le tableau de signe de la fonction $k(x)=\frac{1}{x}+\frac{3}{x-2}$

V- La Factorisation.

1°) Définition:



Remarques:

❶ Factoriser une expression c'est l'écrire comme produit de plusieurs facteurs le plus simplement possible (en général des facteurs du type « ax+b ».

❷ Il existe des expressions non entièrement factorisées, c'est à dire qu'il y a des facteurs qui peuvent se factoriser plus.

❸ Il existe des expressions non entièrement développées, c'est à dire qu'i y a des termes que l'on peut développer plus.

Exemples:

$3x^2+x+1$ est totalement développée.

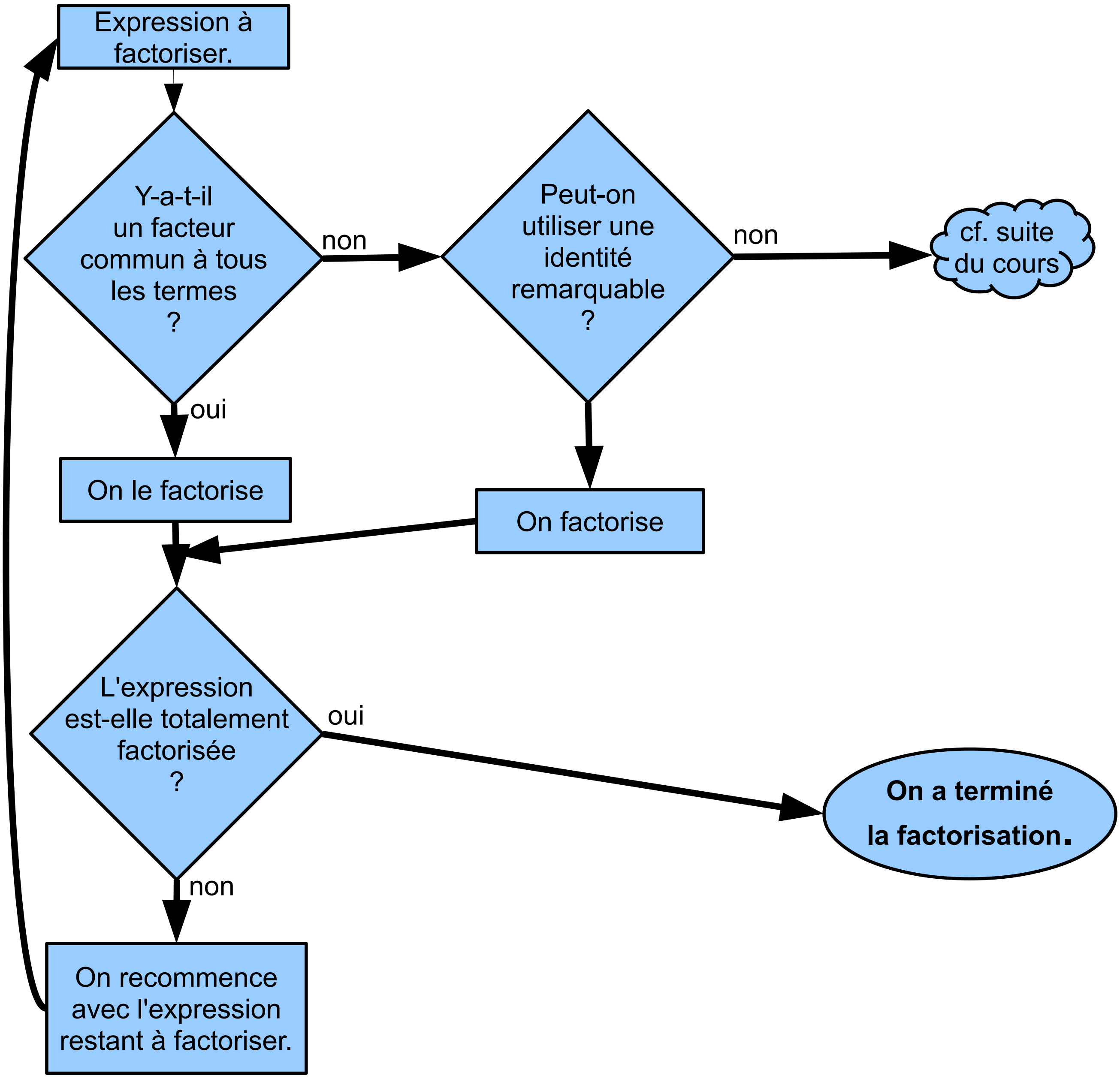
$(2x+1)(3x+2)$ est totalement factorisée.

$(7x+1)(x^2-4)$ est non totalement factorisée car le deuxième facteur peut encore se factoriser.

$x(3x+1)+x$ est non totalement développée.

2°) Méthodes pour factoriser:

On se donne une expression à factoriser. Le diagramme suivant indique la marche à suivre:



Exercice 1: Factoriser les expressions suivantes:

$A(x)=2x^2+x$; $B(x)=(x+1)(2x-1)+(x+1)x$; $C(x)=x^2-2x+1$;

$D(x)=(x+1)^2-(3x-1)^2$; $E(x)=4x^3+12x^2+9x$; $F(x)=(2x+3)(x+1)+(2x+3)$;

$G(x)=4x^2-1$; $H(x)=9x^2-6x+1$.

3°) Application de la factorisation à la résolution d'équations:

Pour résoudre une équation:

☛ Si elle est de degré 1, on isole x au premier membre.

☛ Si elle est de degré plus grand que 1, on met tous les termes au 1er membre, on factorise celui-ci et on écrit qu'un produit est nul si l'un ou l'autre des facteurs est nul.

Exercice 2: résoudre les équations suivantes:

① $7x+2=2x-1$

② $3x^2-2x=x$

③ $(x-1)^2=(2x+3)^2$

④ $6=3x-2$

⑤ $(x-5)(2x+4)=(x+2)x$

✂---
-

4°) Application de la factorisation à la résolution d'inéquations:

Pour résoudre une inéquation:

☛ Si elle est de degré 1, on isole x au premier membre et on en déduit les solutions.

☛ Si elle est de degré plus grand que 1, on met tous les termes au 1er membre, on factorise celui-ci et on étudie le signe du 1er membre en faisant un tableau de signe pour pouvoir conclure.

Exercice 3: résoudre les inéquations suivantes:

① $(x+1)(x+3)\geqslant(x+1)$

② $x^2\geqslant 4$

③ $2x^2-x<3x$

④ $x^2\leqslant 4x-4$