

Suites - Exercices

A. Calculs de termes et variations

(exercices pour commencer : calculer les premiers termes d'une suite, conjecturer son sens de variations, puis démontrer la conjecture en calculant $u_{n+1} - u_n$)

Série 1

a) $u_n = 2^n - n$

b) $u_n = (n - 5)^2$

c) $u_n = \frac{n}{3^n}$

d) $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$

Série 2

a) $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)^2$ et $u_0 = -4$

b) $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{2}$

c) $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ et $u_0 = 3$

d) $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

B. Suites arithmétiques

Exercice 1

a) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_0 = 5$ et $u_{10} = 65$. Calculer u_{20} .

b) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_4 = 12$ et $u_8 = 4$. Calculer u_{20} .

Exercice 2

Parmi les suites suivantes, quelles sont celles qui sont des suites arithmétiques ?

a) $u_n = -2n + 3$

b) $u_n = n^3 - 3n^2 + 2$

c) $u_n = (n + 1)^2 - n^2$

d) $u_n = 5 + 2n$

e) $u_{n+1} = u_n + n - 1$ et $u_0 = 3$

Exercice 3

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$.

On sait que $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 253$. Calculer u_{20} .

C. Calculs de sommes

Exercice 1

(repérer des suites arithmétiques ou géométriques, puis calculer la somme de leurs termes)

a) $S = 0,25 + 0,5 + 0,75 + 1 + \dots + 12,5$

rép : 318,75

b) $S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + \dots + 312,5$

rép : 260,42

c) $S = 4/5 + 7/5 + 2 + \dots + 11$

rép : 531/5

d) $S = 1 + \sqrt{2} + 2 + \dots + 8\sqrt{2}$

rép : $15(1 + \sqrt{2})$

Exercice 2

(u_n) est la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5$.

Calculer les sommes :

$$A = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{99}$$

$$B = u_{100} + u_{101} + u_{102} + \dots + u_{199}$$

$$C = u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{100}$$

D. Etudes de suites récurrentes

Plan général :

- calcul des premiers termes pour voir s'il peut s'agir d'une suite arithmétique ou géométrique
- étude numérique à la calculatrice ou étude graphique pour tester la convergence
- définition d'une suite auxiliaire qui est arithmétique ou géométrique
- expression en fonction de n et calcul de la limite.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
- 2) Montrer que si $u_{n+1} = 1$, alors $u_n = 1$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 1$.
- 3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2+u_n}{1-u_n}$. Calculer v_0 , v_1 , v_2 , v_3 . Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
- 4) Exprimer v_n en fonction de n , en déduire une expression de u_n en fonction de n .
- 5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 6}{u_n - 1}$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
- 2) Montrer que si $u_{n+1} = 2$, alors $u_n = 2$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 2$.
- 3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$. Calculer v_0 , v_1 , v_2 , v_3 . Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
- 4) Exprimer v_n en fonction de n , en déduire une expression de u_n en fonction de n .
- 5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exemple 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
- 2) Soient f et g les fonctions définies sur $[1 ; 4]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

Construire les représentations graphiques de f et g , en déduire les représentations graphiques de $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$. De quel nombre semble se rapprocher u_n ?

- 3) Montrer que si $u_{n+1} = -1$, alors $u_n = -1$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq -1$.
- 4) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Calculer v_0 , v_1 , v_2 , v_3 . Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
- 5) Exprimer v_n en fonction de n , en déduire une expression de u_n en fonction de n .
- 6) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exemple 4

(ici la suite auxiliaire est arithmétique)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+7u_n}$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 . S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?

2) Montrer que si $u_{n+1} = 0$, alors $u_n = 0$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 0$.

3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2-u_n}{u_n}$. Calculer v_0 , v_1 , v_2 , v_3 . Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

4) Exprimer v_n en fonction de n , en déduire une expression de u_n en fonction de n .

5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?