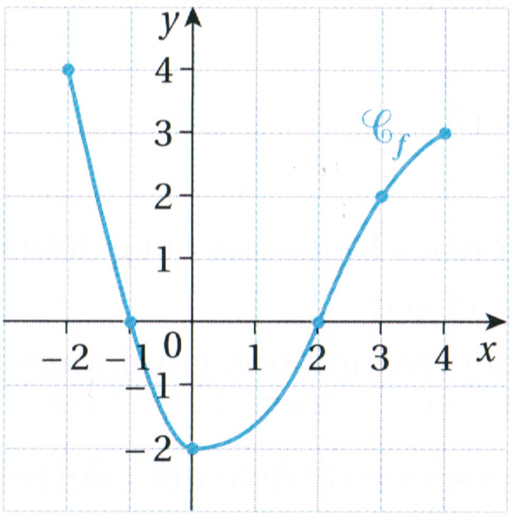
Exercices sur les fonctions associées

Exercice 1

Soit f la fonction $x \longmapsto |(x)|$ et C_f sa courbe représentative.
Construire C_f et les courbes C_1 , C_2 et C_3 représentant respectivement les fonctions -2f, f-3 et $\frac{f}{2}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur [-2;4] dont la courbe C_f est représentée sur le graphique ci-dessous.



1°) Construire le tableau de variation de la fonction f.

2°) a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\frac{1}{f}$ et construire son tableau de variations.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\frac{1}{f}$.

3°) a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\sqrt{(f)}$ et construire son tableau de variations.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\sqrt{(f)}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x)=\frac{4x+1}{x+1} \quad \text{(Forme A)}$$

1°) Montrer que, pour tout réel $x\neq-1$, on a :

$$f(x)=4-\frac{3}{x+1} \quad \text{(Forme B)}$$

$$\text{et } f(x)=1+\frac{3x}{x+1} \quad \text{(Forme C)}$$

2°) Répondre dans l'ordre aux questions suivantes, en utilisant la forme de f(x) la mieux adaptée.

a) Montrer que, si $2<x<3$, alors $3<f(x)<\frac{13}{4}$.

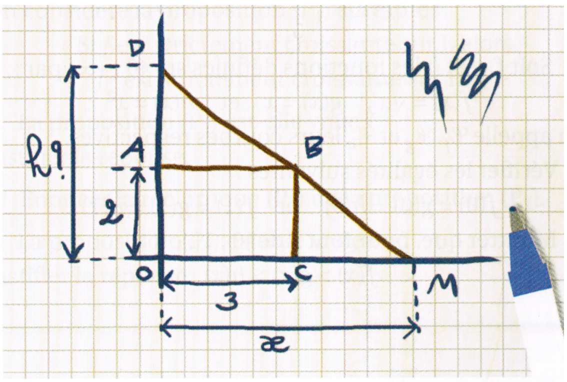
b) Montrer que, pour $x>0$, on a $f(x)>1$.

c) Etudier les variations de f.

d) Etudier le signe de f(x).

Exercice 4

Un charpentier a tracé à main levée le profil d'un étage sous les toits lassant libre un espace rectangulaire OABC. Il souhaite étudier la hauteur h en fonction de la largeur au sol x. Sur son schéma, les longueurs sont exprimées en mètres.



On appelle f la fonction qui à x associe la hauteur h.

a) Expliquer pourquoi x est strictement supérieur à 3.

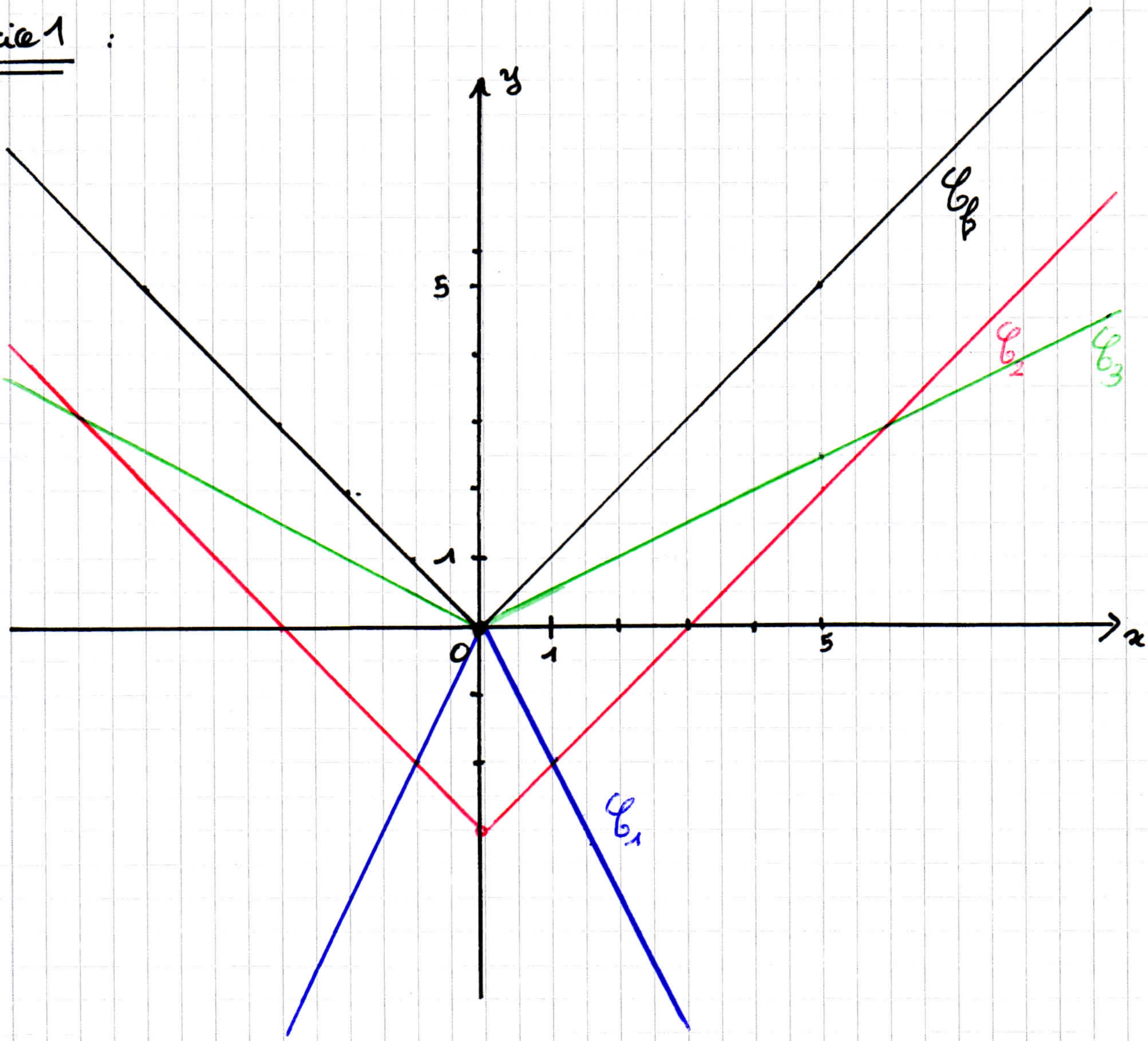
b) Montrer que $f(x)=2+\frac{6}{x-3}$.

c) Etudier le sens de variation de f et construire sa représentation graphique.

d) Montrer que si $\frac{9}{2}\leq x\leq 6$ alors $4\leqslant h\leqslant 6$.

Correction.

Exercice 1 :



Exercice 2

1°) Tableau de variation de f

x	-2		0		4
$f(x)$	4	↘	-2	↗	3

2°) a) $\frac{1}{f}$ est définie lorsque f l'est avec $f(x) \neq 0$.

or $f(x)=0$ pour $x=-1$ ou $x=2$

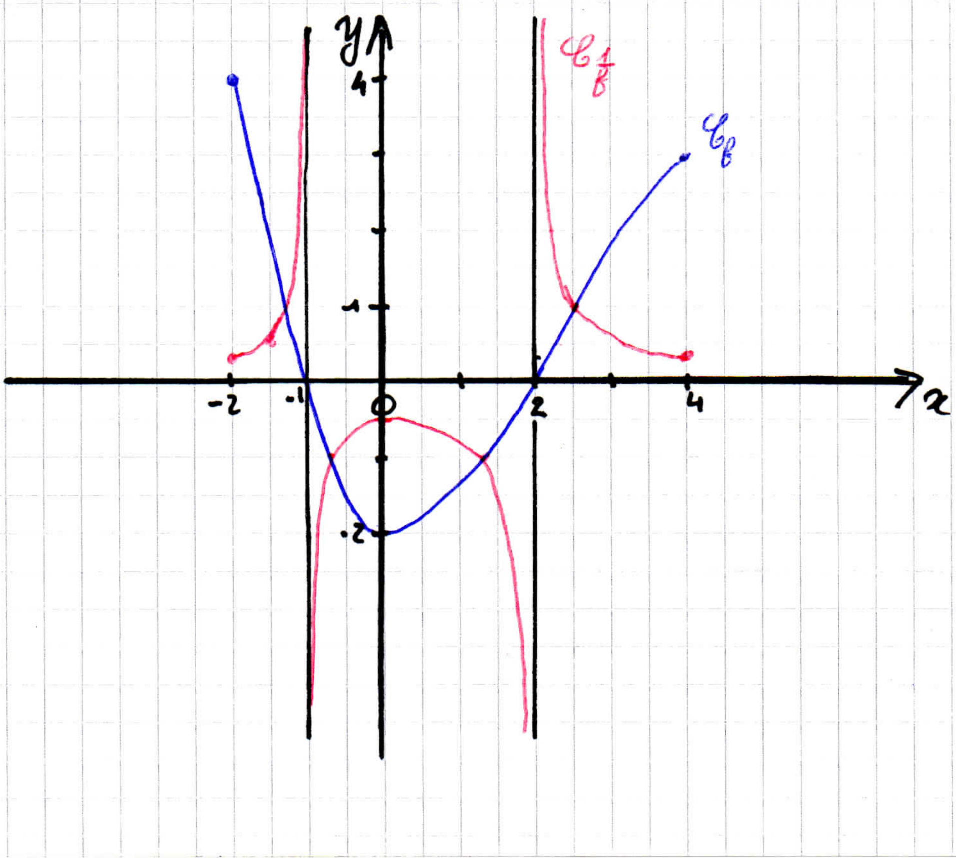
Donc $\boxed{\mathcal{D}_{\frac{1}{f}} =]-2;-1[\cup]-1;2[\cup]2;4[}$

Tableau de variation :

x	-2		-1		0		2		4
f	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$

On utilise le théorème qui dit que f et $\frac{1}{f}$ ont des variations contraires sur tout intervalle où f est strictement positif ou strictement négatif.

b) L'allure de la courbe est la suivante (en rouge)



3°) a) $\sqrt{f}$ est définie lorsque $f(x) \geq 0$

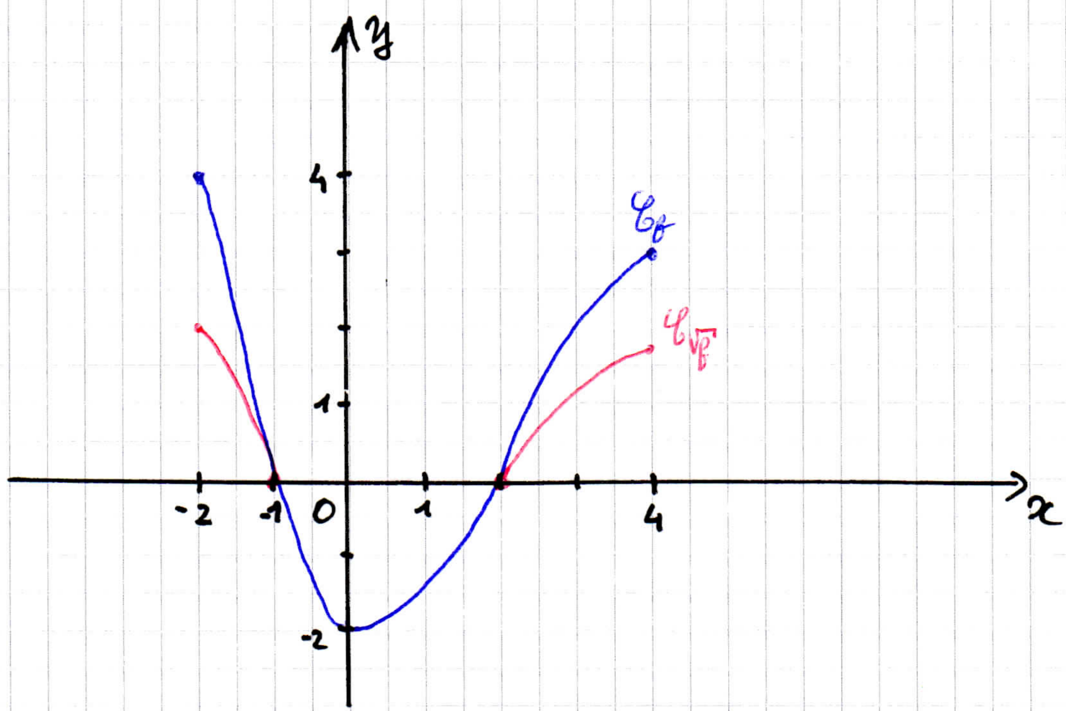
$\boxed{\text{Donc } \sqrt{f} \text{ est définie sur } [-2\,;-1] \cup [2\,;4]}$

<u>Tableau de variations</u>

x	-2		-1		0		2		4
f	4	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	3
$\sqrt{f}$	2	↘	0	//////	//////	//////	0	↗	$\sqrt{3}$

On utilise le théorème qui dit que f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations (sur tout intervalle où f est positive)

b) <u>L'allure de la courbe est la suivante</u> (en rouge)



Exercice 3

1°) * On a : $4 - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{4(x+1)}{x+1} - \dfrac{3}{x+1}$

$$= \frac{4(x+1)-3}{x+1} = \frac{4x+4-3}{x+1} = \frac{4x+1}{x+1} = f(x)$$

Donc $\boxed{f(x) = 4 - \dfrac{3}{x+1}}$

* On a aussi

$$1 + \frac{3x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{3x}{x+1} = \frac{x+1+3x}{x+1} = \frac{4x+1}{x+1} = f(x)$$

Donc $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{3x}{x+1}}$

2°) a) J'utilise la forme B : $f(x) = 4 - \dfrac{3}{x+1}$

$2 < x < 3$

$\Rightarrow 2+1 < x+1 < 3+1$

$\Rightarrow 3 < x+1 < 4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{1}{4}$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow -3\times\left(\dfrac{1}{3}\right) < -\dfrac{3}{x+1} < -\dfrac{3}{4}$ (on a multiplié par un nombre négatif)

$\Rightarrow -1 < -\dfrac{3}{x+1} < -\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow 4-1 < 4-\dfrac{3}{x+1} < -\dfrac{3}{4}+4$

$\Rightarrow \boxed{3 < f(x) < \dfrac{13}{4}}$ CQFD

2°) b) J'utilise la forme C : $f(x) = 1 + \dfrac{3x}{x+1}$

si $x > 0$ alors $\dfrac{3x}{x+1} > 0$ et donc $f(x) > 1$

CQFD

2°) c) J'utilise la forme B : $f(x) = 4 - \frac{3}{x+1}$

f est définie sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

<u>On peut remarquer</u> : que sur $]-\infty ; -1[$; $x+1<0$

et que sur $]-1 ; +\infty[$; $x+1>0$

- <u>Sur $]-\infty ; -1[$</u> $x \mapsto x+1$ est croissante (fonction affine de coef. directeur 1)

Donc comme $x+1<0$ sur $]-\infty ; -1[$

$\frac{1}{x+1}$ sera décroissante.

ainsi $-\frac{3}{x+1}$ sera croissante

et donc $-\frac{3}{x+1}+4$ sera croissante.

<u>conclusion</u> : $\boxed{f(x) = 4 - \frac{3}{x+1} \text{ est croissante sur }]-\infty ; -1[}$

- <u>sur $]-1 ; +\infty[$</u> la démonstration est la même (sauf que $x+1>0$)

et donc $\boxed{f(x) \text{ est croissante sur }]-1 ; +\infty[}$

2°) d) Pour étudier le signe de $f(x)$, j'utilise la forme A, et je fais un tableau de signe (puisqu'on connait le signe des fonctions affines)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 4

a) x désigne la longueur OM et comme M se situe nécessairement à "droite de C", on aura $x > 3$

b) Les triangles MOD et MCB sont en situation de Thalès car $(BC)//(OD)$. Nous avons donc d'après le théorème de Thalès.

$$\frac{MO}{MC} = \frac{OD}{CB} \iff \frac{x}{x-3} = \frac{h}{2} \iff \frac{2x}{x-3} = h$$

Or $f(x)$ est la hauteur h, donc $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

De plus : $2 + \frac{6}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{6}{x-3} = \frac{2x-6+6}{x-3} = \frac{2x}{x-3} = f(x)$

D'où $\boxed{f(x) = 2 + \frac{6}{x-3}}$

c) sur $]3;+\infty[$ $x \longmapsto x-3$ est croissante (et strictement positive)

donc $x \longmapsto \frac{1}{x-3}$ est décroissante

ainsi $x \longmapsto 6 \times \left(\frac{1}{x-3}\right)$ est décroissante

Donc $x \longmapsto 2 + \frac{6}{x-3}$ est décroissante.

Conclusion : $f(x) = 2 + \frac{6}{x-3}$ est décroissante sur $]3;+\infty[$

(voir graphique sur la page suivante)

d) Si $\frac{9}{2} \leq x \leq 6$

alors $f\left(\frac{9}{2}\right) \geq f(x) \geq f(6)$ car f décroissante sur $]3;+\infty[$

donc $6 \geq f(x) \geq 4$ car $f\left(\frac{9}{2}\right) = 6$ et $f(6) = 4$

c'est à dire : $\boxed{4 \leq h = f(x) \leq 6}$.

$\boxed{\text{CQFD}}$

Coube représentative de f (on voit que si 4,5<x<6 alors 4<f(x)<6)