Limites : exercices

Les réponses non détaillées aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte horizontale en $+\infty$)
a) $f(x) = x + \sqrt{x}$
b) $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$
d) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$
e) $f(x) = \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x^2}-1}$

Exercice 2 :

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte horizontale en $-\infty$)
a) $f(x) = \frac{1}{x^3} - x$
b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
c) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 2$
d) $f(x) = \frac{x+1}{\frac{1}{x}-2}$

Exercice 3 :

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction polynôme f dans les cas suivants :
a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$
b) $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$
c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

Exercice 4 :

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction rationnelle f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte horizontale en $-\infty$ ou en $+\infty$)
a) $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$
b) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x+3}$
c) $f(x) = \frac{-4x+1}{x^2+1}$

Exercice 5 :

Déterminer la limite en a (pour $x < a$ et pour $x > a$) de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte verticale)
a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $\quad a = 0$
b) $f(x) = \frac{3x-2}{x+2}$ $\quad a = -2$
c) $f(x) = \frac{x^2+x-3}{1-x}$ $\quad a = 1$

Exercice 6 :

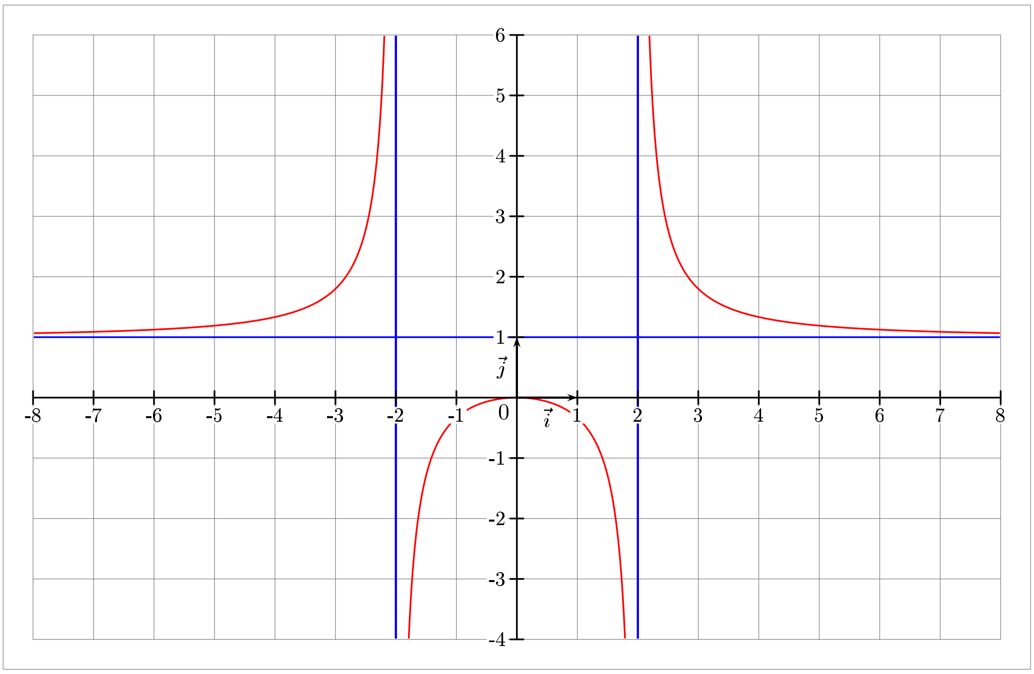
Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x^2+2}{x+1}$.

a) Etudier les limites de f en -1 $(x>-1)$ et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite D d'équation $y=-x+1$ est une asymptôte oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 7 :

f est une fonction définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ dont la courbe est représentée sur le graphique ci-dessous en rouge.
Les asymptotes à la courbe de f sont signalées en bleu.
Déterminer, d'après le graphique, les limites de la fonction f aux bornes et une équation de chacune des asymptotes.



Réponses exercice 1 :

Par application directe des règles sur les opérations avec les limites :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ - pas d'asymptote horizontale

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ - pas d'asymptote horizontale

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ - asymptote horizontale d'équation $y=1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ - asymptote horizontale d'équation $y=-2$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ - asymptote horizontale d'équation $y=-2$

Réponses exercice 2 :

Par application directe des règles sur les opérations avec les limites :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ - pas d'asymptote horizontale

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ - pas d'asymptote horizontale

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ - asymptote horizontale d'équation $y=-2$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ - pas d'asymptote horizontale

Réponses exercice 3 :

On utilise la règle pour les limites des fonctions polynomes en $+\infty$ et en $-\infty$.
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = -\infty$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x^3 = +\infty$

Réponses exercice 4 :

On utilise la règle pour les limites des fonctions rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$.
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2$
Asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2} \times x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2} \times x = -\infty$
Pas d'asymptote horizontale.
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -4 \times \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -4 \times \dfrac{1}{x} = 0$
Asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Réponses exercice 5 :

Par application directe des règles sur les opérations avec les limites (on ne peut plus utiliser la règle sur les fonctions rationnelles car on n'est plus en $+\infty$ ou en $-\infty$) :
a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \underbrace{x}_{\to0} + \underbrace{\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \underbrace{x}_{\to0} + \underbrace{\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\to-\infty} = -\infty$
Asymptote verticale d'équation $x = 0$.
b) $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \underbrace{(3x-2)}_{\to-8} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{x+2}\right)}_{\to+\infty} = -\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2 = 0$ par valeurs positives)

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \underbrace{(3x-2)}_{\to-8} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{x+2}\right)}_{\to-\infty} = +\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2 = 0$ par valeurs négatives)
Asymptote verticale d'équation $x = -2$.
c) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \underbrace{(x^2+x-3)}_{\to-1} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}_{\to-\infty} = +\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-x = 0$ par valeurs négatives)

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \underbrace{(x^2+x-3)}_{\to-1} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{1-x}\right)}_{\to+\infty} = -\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 1-x = 0$ par valeurs positives)
Asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Réponses exercice 6 :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \underbrace{(-x^2+2)}_{\to3} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{x+1}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} x+1 = 0$ par valeurs positives)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ (utilisation de la règle pour les limites des fonctions rationnelles en $+\infty$)
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2+2}{x+1} + x - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2+2+x^2+x-x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$).
Cela prouve bien que D est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.

Réponses exercice 7 :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.
Les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à la courbe.