Classe: 1SSI	Date: 19/12/2012	**Type**
Devoir n°9		**Devoir maison pour le 14/01/2013**
Thème: Angles orientés de vecteurs		

Exercice 1

1) Construisez une ligne brisée ABCDE telle que :

AB=4, BC=3, CD=2 et DE=2 (en cm) et $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-\frac{5\pi}{6}$, $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=-\frac{\pi}{2}$, $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})=\frac{\pi}{3}$.

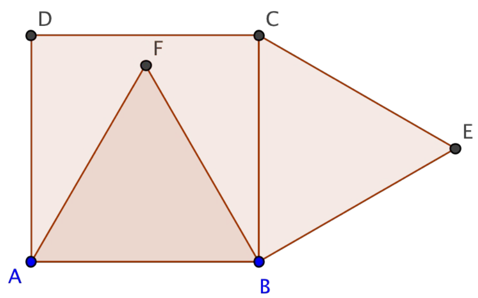
2) a) Justifiez l'égalité : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$.

b) Déduisez-en une mesure de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})$.

3) Justifier la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$, et déduisez-en un réel k tel que $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2

ABCD est un carré direct, ABF et CBE sont équilatéraux et directs.



1°) a) Donner une mesure des angles orientés de vecteurs : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

b) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD})$.

c) Justifier que $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA})=\frac{5\pi}{12}$.

2°) a) Montrer que : $(\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BE})=-\frac{\pi}{2}$.

b) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE})$.

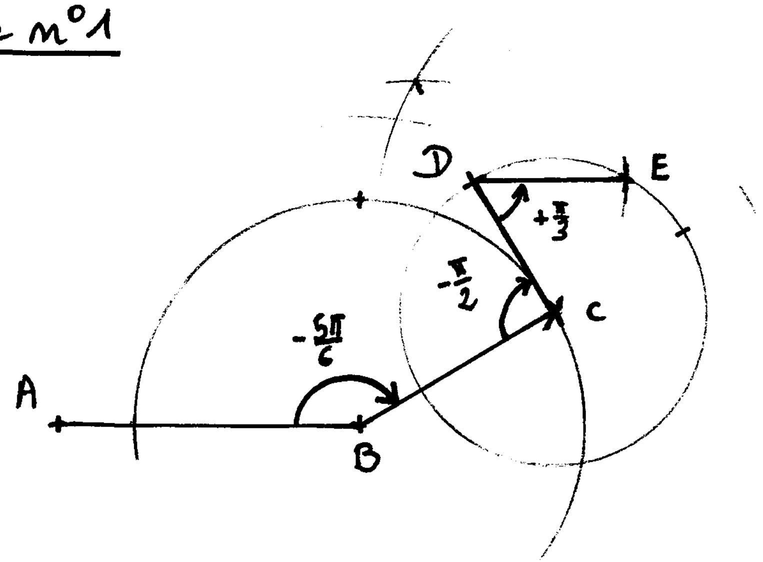
3°) a) Avec la relation de Chasles et les résultats précédents, calculer $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE})$

b) Que peut-on en déduire pour les points D, E et F ?

Corrigé du devoir

Exercice n°1

1°)



2pts

2°a) D'après la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}) \quad (2\pi)$$

1pt

b) En utilisant la relation précédente (question 2°a)

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}) &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}) && (2\pi)\\ &= (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+\pi+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})+\pi+(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})+\pi && (2\pi)\\ &= -\frac{5\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}+3\pi && (2\pi)\ \text{(d'après les hypothèses)}\\ &= \frac{-5\pi-3\pi+2\pi}{6}+\pi \quad (2\pi) && (\text{car } 3\pi=\pi\ (2\pi))\\ &= -\pi+\pi && (2\pi)\\ &= 0 && (2\pi)\end{aligned}$$

2pts

3°) On vient de montrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE})=0 \quad (2\pi)$.

Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens. Il existe donc un réel $k>0$ tel que : $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}$

Cette égalité vectorielle implique l'égalité des normes, donc :

$$DE=|k|AB \quad , \text{ d'où } |k|=\frac{DE}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Comme $k>0$, $k=\frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$

2pts

Exercice 2

1°) a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$ car ABF est un triangle équilatéral direct.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ car ABCD est un carré direct.

(1pt)

b) $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \ (2\pi)$ (d'après Chasles)

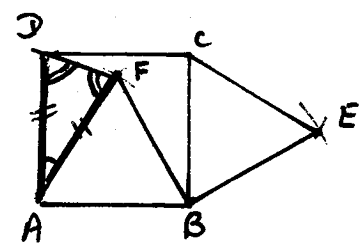
$= -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \ (2\pi)$

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ (d'après 1°a)

$= \frac{-2\pi + 3\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \ (2\pi)$

(2pts)

c) Le triangle AFD est isocèle en A car AF = AD.



En utilisant les angles géométriques dans le triangle AFD on a :

$\hat{A} + \hat{F} + \hat{D} = \pi$ avec $\hat{F} = \hat{D}$ car AFD est isocèle en A

$\hat{A} = \frac{\pi}{6}$ d'après 1°b)

Donc $\frac{\pi}{6} + 2\hat{F} = \pi$

$\Rightarrow 2\hat{F} = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2\hat{F} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \hat{F} = \frac{5\pi}{12}$

Cela signifie, en tenant compte de l'orientation :

$$\boxed{(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}) = \frac{5\pi}{12} \ (2\pi)}$$

(3pts)

2°) a) $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$ d'après Chasles

$= \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \ (2\pi)$

(car ABF est équilatéral direct) (car ABCD est un carré direct) (car CBE est équilatéral direct)

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

CQFD

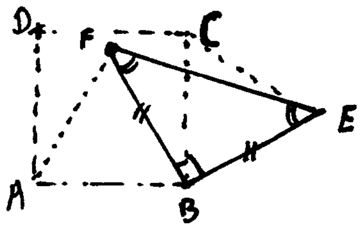
(2pts)

2°b) Comme à la question 1c) on utilise les angles géométrique dans le triangle BFE qui est isocèle et rectangle en B.

Dans ce triangle on a : $\hat{B} + \hat{F} + \hat{E} = \pi$

$\frac{\pi}{2} + \hat{F} + \hat{F} = \pi$

car le triangle est isocèle



donc $2\hat{F} = \pi - \frac{\pi}{2}$ et donc $\hat{F} = \frac{\pi}{4}$

En tenant compte de l'orientation : $\boxed{(\vec{FB}, \vec{FE}) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)}$ 2pts

3°a) $(\vec{FD}, \vec{FE}) = (\vec{FD}, \vec{FA}) + (\vec{FA}, \vec{FB}) + (\vec{FB}, \vec{FE}) \ (2\pi)$ (Charles)

$= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$ (Résultats précédents)

$= \frac{5\pi + 4\pi + 3\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} = \pi \ (2\pi)$ 2pts

b) Comme $(\vec{FD}, \vec{FE}) = \pi \ (2\pi)$

Les points D, E et F sont alignés. 1pt