Devoir n°7 : devoir surveillé

B.T.S. ELECTROTECHNIQUE

MATHÉMATIQUES

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

Exercice

Une entreprise fabrique des brioches en grande quantité.
On pèse les boules de pâte avant cuisson. On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule de pâte, associe sa masse. On admet que X suit la loi normale de moyenne 700 g et d'écart-type 20 g.

1) Seules les boules dont la masse est comprise entre 660 g et 732 g sont acceptées à la cuisson.
Quelle est la probabilité qu'une boule, prise au hasard dans la production, soit acceptée à la cuisson ?

2) On désigne par h un réel positif. Déterminer h afin que l'on ait : $P(700 - h \leq X \leq 700 + h) \geq 0{,}95$.

3) On admet que 8 % des boules sont refusées à la cuisson.
On prélève au hasard, successivement et avec remise, n boules dans la production. On note Y_n la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de n boules, associe le nombre de boules qui seront refusées à la cuisson. Cette variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale.

a- Dans le cas $n = 10$, calculer la probabilité d'avoir, parmi les 10 boules prélevées, exactement 3 boules refusées à la cuisson.

b- Dans le cas $n = 50$, on admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_{50} par une loi de Poisson.
Préciser le paramètre de cette loi de Poisson.
Calculer alors la probabilité d'avoir, parmi les 50 boules prélevées, exactement 4 boules refusées à la cuisson, puis la probabilité d'avoir au moins 45 boules acceptées à la cuisson.

Corrigé du devoir

X suit la loi normale $\mathcal{N}(m = 700 ; \sigma = 20)$

on pose : $X^* = \dfrac{X - 700}{20}$. On sait que X^* suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

1°) La probabilité qu'une barre soit acceptée est :

$$P(660 \leq X \leq 732) = P\left(-\frac{40}{20} \leq \frac{X-700}{20} \leq \frac{32}{20}\right)$$

$$= P(-2 \leq X^* \leq 1{,}6)$$

$$= \Pi(1{,}6) - \Pi(-2)$$

$$= \Pi(1{,}6) - (1 - \Pi(2))$$

$$= \Pi(1{,}6) + \Pi(2) - 1$$

$$= 0{,}9452 + 0{,}9772 - 1 \quad \text{(d'après la table)}$$

$$= \underline{\underline{0{,}9224}} \quad \text{5 pts}$$

2°) On cherche h tel que :

$$P(700 - h \leq X \leq 700 + h) \geq 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{20} \leq \frac{X-700}{20} \leq \frac{h}{20}\right) \geq 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{20} \leq X^* \leq \frac{h}{20}\right) \geq 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{20}\right) - \Pi\left(-\frac{h}{20}\right) \geq 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{20}\right) - \left(1 - \Pi\left(\frac{h}{20}\right)\right) \geq 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow 2\,\Pi\left(\frac{h}{20}\right) - 1 \geq 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{20}\right) \geq 0{,}975$$

Donc $\dfrac{h}{20} \geq 1{,}96$ d'après les tables

Donc $\boxed{h \geq 39{,}2}$ 5pts

3) Y_n indique le nombre de boules refusées à la cuisson parmi n boules. La probabilité qu'une boule soit refusée est : $p = 0,08$. Donc Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p = 0,08)$

a) Ici $n = 10$. On cherche :

4pts

$$P(Y_{10} = 3) = C_{10}^{3} p^3 q^7 = 120 \times 0,08^3 \times 0,92^7 = 0,03427$$

b) Y_{50} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5 ; p = 0,08)$
On peut l'approcher par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 50 \times 0,08 = 4$.

2pts

Avec cette approximation :

2pts

- $P(Y_{50} = 4) = 0,195$ (table de la loi de Poisson)

- Au moins 45 boules acceptées signifie qu'il y a 5 ou moins que 5 boules refusées :

$$\begin{aligned} P(Y_{50} \leq 5) &= P(Y_{50} = 0) + P(Y_{50} = 1) + \dots + P(Y_{50} = 5) \\ &= 0,018 + 0,073 + 0,147 + 0,195 + 0,195 + 0,156 \\ &= 0,784 \end{aligned}$$

2pts