Classe: 1SSI	Date: 15/10/2012	**Type**
Devoir n°5		**Devoir surveillé**
Thème: Suites		

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n-1}{3}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

c) Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

Exercice 2 (4 points)

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison positive telle que:

$$v_6 = 243 \text{ et } v_8 = 2187.$$

a) Déterminer la raison q de cette suite et son premier terme v_0.

b) Calculer $S_7 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_7$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = w_n(1 + w_n)$.

a) Calculer w_1, w_2 et w_3.

b) S'agit-il d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ?

b) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de cette suite ?
Démontrer cette conjecture.

Exercice 4 (6 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et la relation: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{3}{2}u_n-1$.

1°) Sur le graphique en annexe, on a tracé les droites D et Δ d'équations:

$$D: \ y=\frac{3}{2}x-1 \quad \text{et} \quad \Delta: y=x.$$

Construire, sur l'axe des abscisses: u_0, u_1, u_2 et u_3.

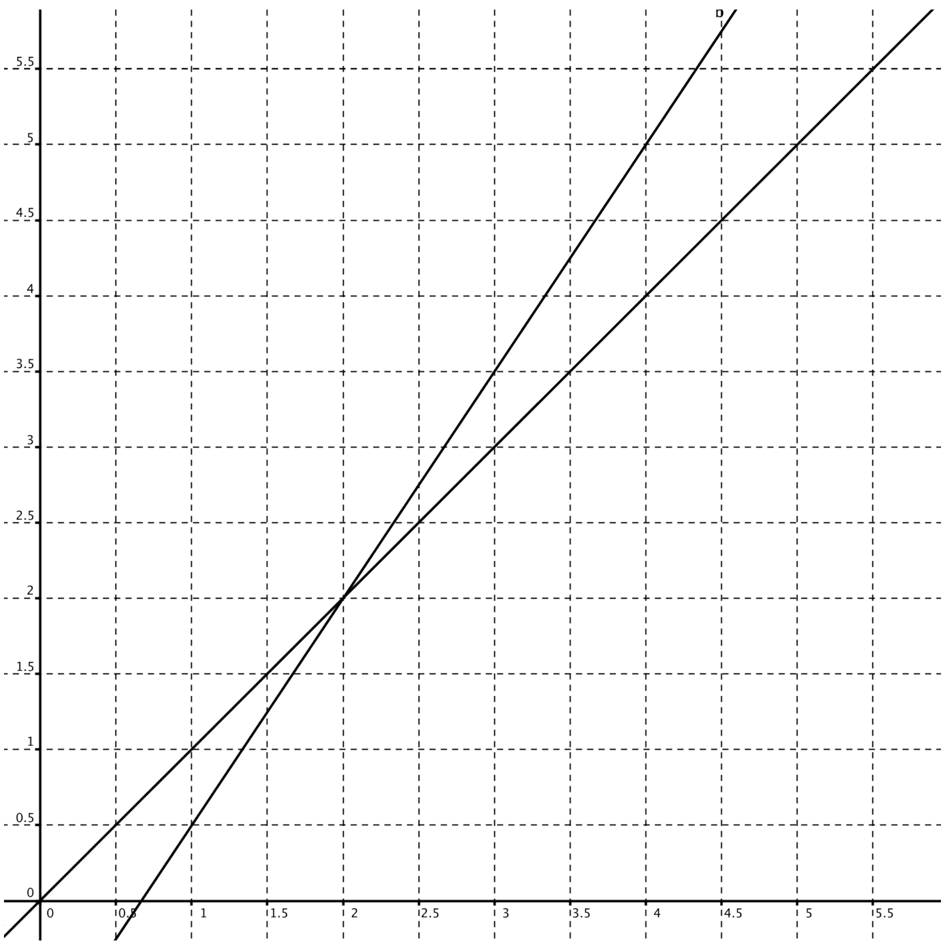
2°) Montrer que la suite (v_n), définie par: $v_n=u_n-2$, est une suite géométrique.

3°) Exprimer v_n en fonction de n.

4°) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Graphique annexe (Exercice 4):

NOM:
Prénom:



Exercice 1

a) $u_0 = -\frac{1}{3}$

$u_1 = \frac{1}{3}$

$u_2 = 1$

$u_3 = \frac{5}{3}$

1

b) On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-1}{3} - \frac{2n-1}{3}$

$= \frac{2n+2-1-2n+1}{3} = \frac{2}{3}$

2

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

c) $S_{10} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

$S_{10} = 11 \times \left(\frac{u_0 + u_{10}}{2}\right)$ car (u_n) est arithmétique

$S_{10} = 11 \times \left(\frac{-\frac{1}{3} + \frac{19}{3}}{2}\right) = 11 \times \frac{6}{2} = 11 \times 3 = 33$

2

Exercice 2

a) Comme (v_n) est géométrique de raison q :

$$v_n = v_0 q^n$$

$v_6 = v_0 q^6 = 243$

$v_8 = v_0 q^8 = 2187$

Donc $\frac{v_8}{v_6} = \frac{v_0 q^8}{v_0 q^6} = q^2 = \frac{2187}{243}$

Donc $q^2 = 9$ donc $q = 3$ (car $q > 0$)

De plus : $v_6 = v_0 q^6$

Donc $243 = v_0 \cdot 3^6$

d'où $v_0 = \frac{243}{3^6} = \frac{1}{3}$

2

Conclusion : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$, de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$

b) $S_7 = v_0 + v_1 + \cdots + v_7$

$S_7 = v_0 + v_0 q + \cdots + v_0 q^7$ car $v_n = v_0 q^n$

$S_7 = v_0(1 + q + \cdots + q^7)$

$S_7 = v_0 \times \left(\frac{1-q^8}{1-q}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1-3^8}{1-3}\right)$ 2

$\boxed{S_7 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{6560}{2}\right) = \frac{3280}{3}}$ $(\simeq 1093{,}33\ldots)$

Exercice 3

a) $w_0 = 2$

$w_1 = 2(1+2) = 6$

$w_2 = 6(1+6) = 42$ 1

$w_3 = 42(1+42) = 1806$

b) $w_1 - w_0 = 4$

$w_2 - w_1 = 42 - 6 = 36$

Donc $w_2 - w_1 \neq w_1 - w_0$: la suite n'est pas arithmétique

$\left.\begin{array}{l} \frac{w_1}{w_0} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{w_2}{w_1} = \frac{42}{6} = 7 \end{array}\right\}$ Donc $\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$

La suite (w_n) n'est pas géométrique. 1

c) Il semble que (w_n) soit croissante 1

Démonstration :

$w_{n+1} - w_n = w_n(1 + w_n) - w_n$

$= w_n + w_n^2 - w_n$ 2

$= w_n^2$

or $w_n^2 \geqslant 0$, donc $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$

La suite (w_n) est donc croissante.

Exercice 4

1°) Voir graphique

2°) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$

$$= \frac{3}{2}u_n - 1 - 2$$

$$= \frac{3}{2}u_n - 3$$

Or $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$

Ainsi

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}(v_n + 2) - 3$$

$$= \frac{3}{2}v_n + 3 - 3$$

$$= \frac{3}{2}v_n$$

2

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

3°) D'après 2°, comme $v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$

Donc

$$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

1

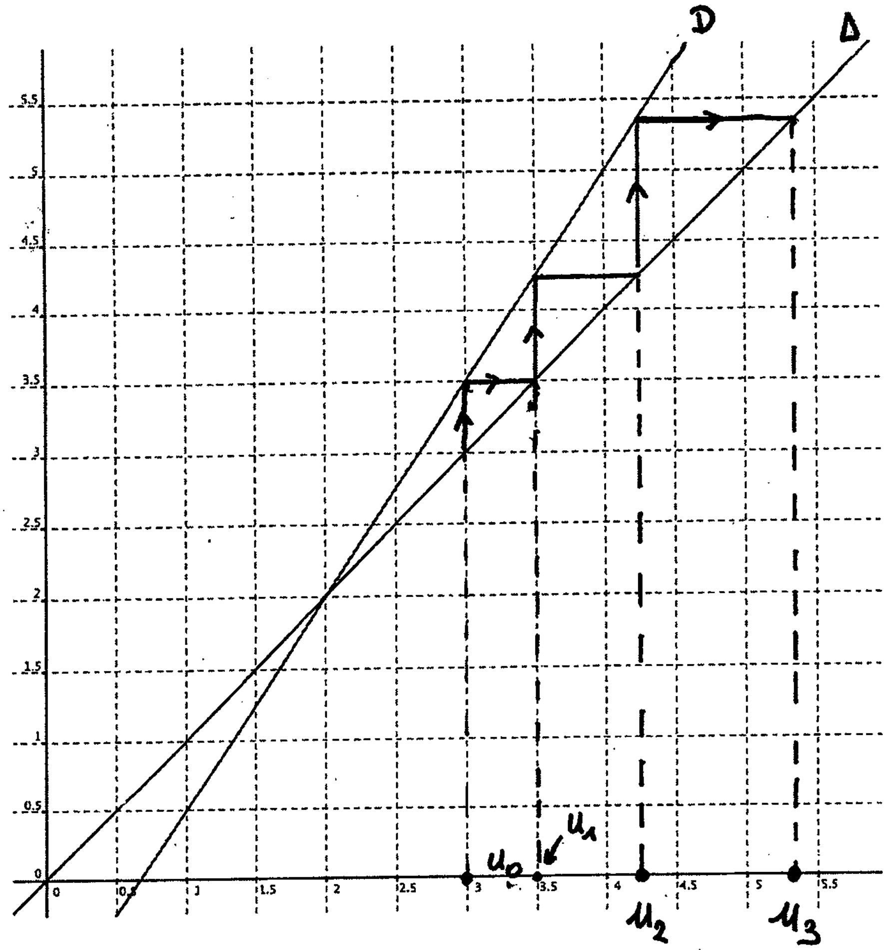
4°) Comme $u_n = v_n + 2$

Donc $\boxed{u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}$

2

Graphique annexe (Exercice 4):

NOM:
Prénom:



①