| Classe: 1SSI | Date: 1/10/2010 | **Type** |
|---|---|---|
| **Devoir n°4** | | **Devoir surveillé** |
| Thème: Suites | | |

### Exercice 1 (5 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{3n+1}{4}$.

a) Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite arithmétique.
c) Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + u_2 + .... + u_{10}$.

### Exercice 2 (4 points)

La suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison positive telle que:

$$v_{10} = 384 \text{ et } v_{14} = 6144.$$

a) Déterminer la raison $q$ de cette suite et son premier terme $v_0$.
b) Calculer $S_7 = v_0 + v_1 + v_2 + .... + v_7$.

### Exercice 3 (5 points)

On considère la suite $(w_n)$ définie par $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_{n+1} = w_n(1 - w_n)$.

a) Calculer $w_1$, $w_2$ et $w_3$.
b) S'agit-il d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ?
b) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de cette suite ?
Démontrer cette conjecture.

### Exercice 4 (6 points)

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et la relation: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1$.

1°) Sur le graphique en annexe, on a tracé les droites D et $\Delta$ d'équations:

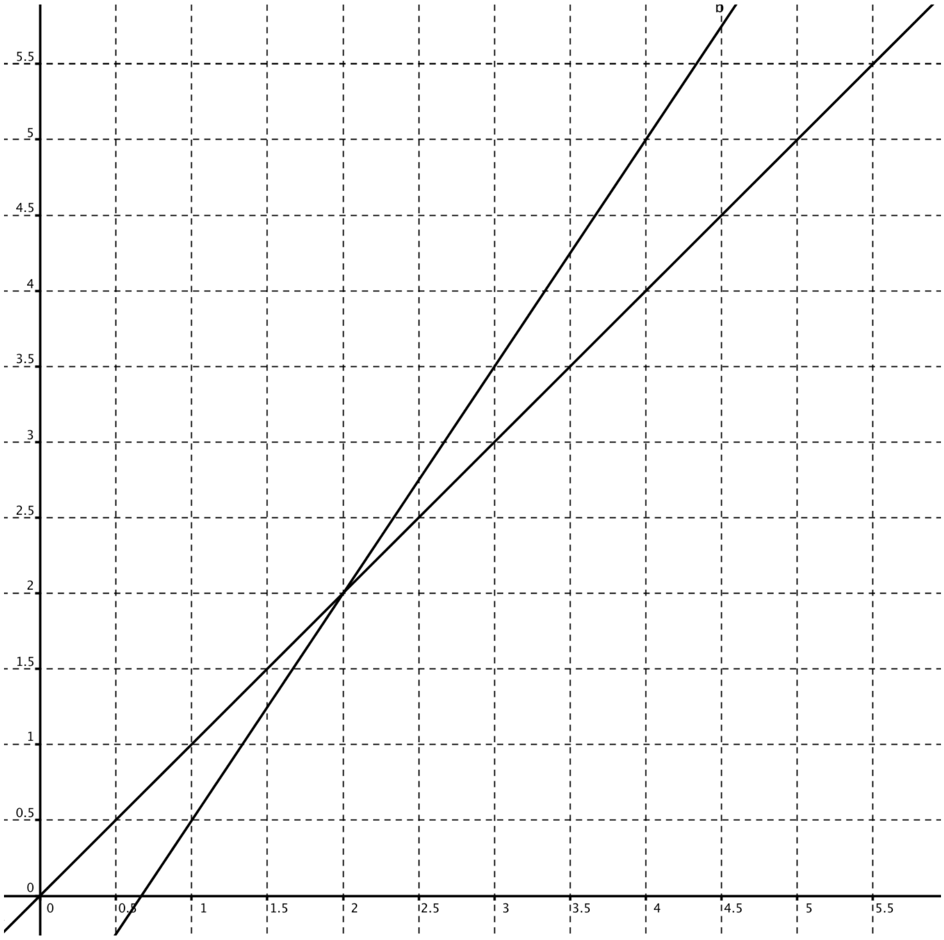
$$D: \ y = \frac{3}{2}x - 1 \quad \text{et} \quad \Delta: y = x.$$

Construire, sur l'axe des abscisses: $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

2°) Montrer que la suite $(v_n)$, définie par: $v_n = u_n - 2$, est une suite géométrique.
3°) Exprimer $v_n$ en fonction de n.
4°) En déduire une expression de $u_n$ en fonction de n.

**<u>Graphique annexe</u>** (Exercice 4):

<u>NOM</u>:
<u>Prénom</u>:



Devoir n°4 - corrigé $1^{ière}$ SSI 

Exercice 1 :

a) $u_0 = \frac{1}{4}$

$u_1 = \frac{4}{4} = 1$

$u_2 = \frac{7}{4}$

$u_3 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

1

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+1}{4} - \frac{3n+1}{4}$

$= \frac{3n+3+1-3n-1}{4} = \frac{3}{4}$

Donc $(u_n)$ est arithmétique de raison $\frac{3}{4}$ 2

c) $S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

$S_{10} = 11 \times \left(\frac{u_0 + u_{10}}{2}\right)$ car $(u_n)$ est arithmétique

$S_{10} = 11 \times \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{31}{4}\right)}{2} = 11 \times 4 = 44$ 2

Exercice 2 

a) Comme $v_n$ est géométrique de raison $q$ :

$v_n = v_0 q^n$

$v_{10} = v_0 q^{10} = 384$

$v_{14} = v_0 q^{14} = 6144$

Donc $\frac{v_{14}}{v_{10}} = \frac{v_0 q^{14}}{v_0 q^{10}} = q^4 = \frac{6144}{384}$

Donc $q^4 = 16$

ainsi $q^2 = 4$ et donc $q = 2$ car $q > 0$

De plus, $v_{10} = v_0 q^{10} = 384$

Donc $v_0 = \frac{384}{q^{10}} = \frac{384}{2^{10}} = \frac{3}{8}$ 2

Conclusion : $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 2$, de premier terme $v_0 = \frac{3}{8}$

b) $S_7 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_7$

$$S_7 = v_0\left(\frac{1-q^8}{1-q}\right)$$ car $(v_n)$ est géométrique

$$S_7 = \frac{3}{8} \times \left(\frac{1-2^8}{1-2}\right) = \frac{3}{8} \times (2^8 - 1) = \frac{3 \times 255}{8}$$

$$\boxed{S_7 = \frac{765}{8} = (95{,}625)}$$ 2

Exercice 3

a) $w_0 = \frac{1}{2}$

$$W_1 = W_0(1-W_0) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$W_2 = W_1(1-W_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$ 1

$$W_3 = W_2(1-W_2) = \frac{3}{16}\left(1-\frac{3}{16}\right) = \frac{3}{16} \times \frac{13}{16} = \frac{39}{256}$$

b) $W_1 - W_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$W_2 - W_1 = \frac{3}{16} - \frac{1}{4} = \frac{3-4}{16} = -\frac{1}{16}$

Donc $(W_n)$ n'est pas arithmétique.



$\frac{W_1}{W_0} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{W_2}{W_1} = \frac{3}{16} \times \frac{4}{1} = \frac{3}{4}$

Donc $(W_n)$ n'est pas géométrique 1

c) Il semble que $(W_n)$ soit décroissante 1

Démonstration

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= W_n(1-W_n) - W_n \\ &= W_n - W_n^2 - W_n \\ &= -W_n^2 \end{aligned}$$

Donc, comme $-W_n^2 \leq 0$, $W_{n+1} - W_n \leq 0$

La suite $(W_n)$ est décroissante. 2

Exercice 4

1°) Voir graphique

2°) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$

$= \frac{3}{2}u_n - 1 - 2$

$= \frac{3}{2}u_n - 3$

<u>Or</u> $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$

<u>Ainsi</u>

$v_{n+1} = \frac{3}{2}(v_n + 2) - 3$

$= \frac{3}{2}v_n + 3 - 3$

$= \frac{3}{2}v_n$ 2

Donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

3°) D'après 2°, comme $v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$



Donc

$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ 1

4°) Comme $u_n = v_n + 2$

Donc $\boxed{u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2}$ 2

**Graphique annexe** (Exercice 4):

NOM:
Prénom: