Classe: TS1ET	Date: 14/12/2012	**Type**
Devoir n°4		**Devoir surveillé**
Thème: Fonctions		

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$.

On note C_f sa courbe représentative.

1°) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2°) Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations.

3°) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

4°) a) Donner le nombre de solutions de l'équation f(x)=0.

b) Donner les solutions de cette équation (valeurs exactes ou valeurs approchées à 0,1 près).

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=2x-3+\frac{9}{2x+1}$.

On note C_f sa courbe représentative.

1°) Calculer la dérivée f' de f et montrer que l'on a :

$$f'(x)=\frac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}.$$

2°) En déduire le tableau des variations de f sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

3°) Déterminer la limite de f en $-\frac{1}{2}^+$ et en $+\infty$.

Compléter le tableau des variations en y portant ces limites.

4°) Déterminer une équation de la tangente à C_f en x=0.

Corrigé du devoir

Exercice 1

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$ 1

car un polynôme se comporte en $\pm\infty$ comme son terme de plus haut degré

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$ 1

2°) Les variations de f sont données par le signe de la dérivée $f'(x)$. 1

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$f'(x)$ est un polynôme de degré 2, il est du signe de $a = 3$ sauf entre les racines : $\Delta = 9 - 4\times3\times(-6) = 9 + 72 = 81 = 9^2$

Il y a deux racines réelles : $\begin{cases} x_1 = \frac{3-9}{6} = -1 \\ x_2 = \frac{3+9}{6} = 2 \end{cases}$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗	$+\infty$

2

$f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 = \frac{-2-3+12}{2} = \frac{7}{2}$

$f(2) = 8 - \frac{3}{2}\times4 - 12 = 8 - 6 - 12 = -10$

3°) L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 s'écrit :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$

$f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 = \frac{-10-3}{2} = -\frac{13}{2}$

$$y = -6(x-1) - \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ y = -6x + 6 - \frac{13}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{y = -6x - \frac{1}{2}}$$ 2

1 4°) a) D'après les variations de f, l'équation $f(x)=0$ a 3 solutions. 2/3

b) $f(x)=0 \iff x^3-\frac{3}{2}x^2-6x=0$

$\iff x\left(x^2-\frac{3}{2}x-6\right)=0$

$\iff x=0$ ou $x^2-\frac{3}{2}x-6=0$

$\Delta=\frac{9}{4}+4\times 6=\frac{9}{4}+\frac{96}{4}=\frac{105}{4}$

2

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{105}}{2}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{105}}{4}\simeq-1{,}811\simeq-1{,}8 \\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{105}}{4}\simeq 3{,}311\simeq 3{,}3 \end{cases}$$

Exercice 2 : $f(x)=2x-3+\frac{9}{2x+1}$

1°) $f'(x)=2-0+9\times\left(-\frac{2}{(2x+1)^2}\right)=2-\frac{18}{(2x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{2(2x+1)^2-18}{(2x+1)^2}=\frac{2\left(4x^2+4x+1-9\right)}{(2x+1)^2}=\frac{2\left(4x^2+4x-8\right)}{(2x+1)^2}$

2 $f'(x)=\frac{8\left(x^2+x-2\right)}{(2x+1)^2}$

or $(x+2)(x-1)=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$

1 Donc $f'(x)=\frac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$

2°) $f'(x)=\frac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$: $f'(x)$ est donc du signe de $(x+2)(x-1)$.

D'où le tableau

x	$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x+2$	‖	$+$		$+$	
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-1)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1

1

$f(1)=2-3+\frac{9}{3}$
$=-1+3$
$=2$

+1 (limites)

3°) $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{9}{2x+1}$

* <u>limite en $-\frac{1}{2}^+$</u>

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} (2x+1) = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \left(\dfrac{9}{2x+1}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} (2x-3) = -1-3 = -4 \end{cases}$$

1

<u>donc</u> $\boxed{\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty}$

* <u>limite en $+\infty$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{9}{2x+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-3) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc} \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

1

4°) L'équation de la tangente s'écrit :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = \frac{8 \times 2 \times (-1)}{1^2} = -16$$

$$f(0) = -3 + 9 = 6$$

Donc l'équation de la tangente est :

$$\boxed{y = -16x + 6}$$

2