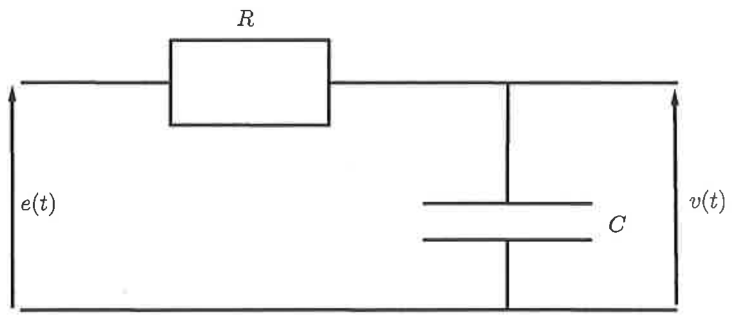
TS2ET: Devoir n°4: pour le 26 novembre 2012

EXERCICE 2 (10 points)

Un circuit électrique comporte, en série, une résistance R et un condensateur de capacité C.



Le circuit est alimenté par une tension « source » représentée par une fonction e. La tension aux bornes du condensateur est représentée par une fonction v. Si on considère cette tension comme signal de « sortie », le circuit joue le rôle de filtre passe-bas.

On notera $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Partie A

Les fonctions e et v vérifient l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ suivante :

$$RC\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + v(t) = e(t).$$

De plus, on suppose que $v(t) = 0$ pour tout nombre réel t négatif ou nul. En particulier, on a $v(0) = 0$.

On admet que les fonctions e et v possèdent des transformées de Laplace, notées respectivement E et V.

1. La tension e appliquée en entrée au circuit est telle que, pour tout nombre réel t :

$$e(t) = 10\mathcal{U}(t).$$

   (a) Tracer sur la copie une représentation graphique de la fonction e.

   (b) Exprimer $E(p)$.

2. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, montrer que :

$$V(p) = \frac{10}{p(RCp+1)}.$$

3. (a) Vérifier que

$$V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}.$$

(b) En déduire l'expression de $v(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul en fonction de t, R et C.

Partie B

Dans toute la suite, j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
La transmittance isochrone T du circuit est définie, pour toute pulsation ω, par :

$$T(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}.$$

1. On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
   Montrer que :

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

2. Calculer $T(\omega_0)$. Déterminer alors le module et un argument du nombre complexe $T(\omega_0)$.

3. Cette question est posée sous la forme d'un QCM. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, on écrira sur la copie la formule choisie. L'absence de réponse ou une mauvaise réponse n'est pas pénalisante.

   (a) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne le module du nombre complexe $T(\omega)$?

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad 1+\frac{\omega}{\omega_0} \qquad \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

   (b) Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle donne un argument du nombre complexe $T(\omega)$?

$$-\arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \qquad \frac{\omega}{\omega_0} \qquad -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4. Vérifier la concordance entre les résultats trouvés aux questions 2 et 3a puis 2 et 3b.

5. Pour une pulsation ω de la tension d'entrée e, le gain $G_{\mathrm{db}}(\omega)$ du circuit, exprimé en décibels, est donné par la formule

$$G_{\mathrm{db}}(\omega) = \frac{20}{\ln(10)} \ln(|T(\omega)|).$$

Calculer, à une unité près, le gain correspondant à la pulsation ω_0.

6. **Pour toute la suite de l'exercice, on se place dans le cas où** $\omega_0 = 500$.

   Pour tout nombre réel ω appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on pose

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{500}\right)$$

   et on note $M(\omega)$ le point de coordonnées $(\varphi(\omega)\,; G_{\text{db}}(\omega))$.

   Le point $M(\omega)$ décrit la courbe tracée sur la figure du document réponse lorsque ω varie.

   (a) Calculer $\varphi(\omega_0)$.

   (b) Placer alors le point $M_0 = M(500)$.

   (c) En déduire graphiquement l'ordonnée du point M_0.

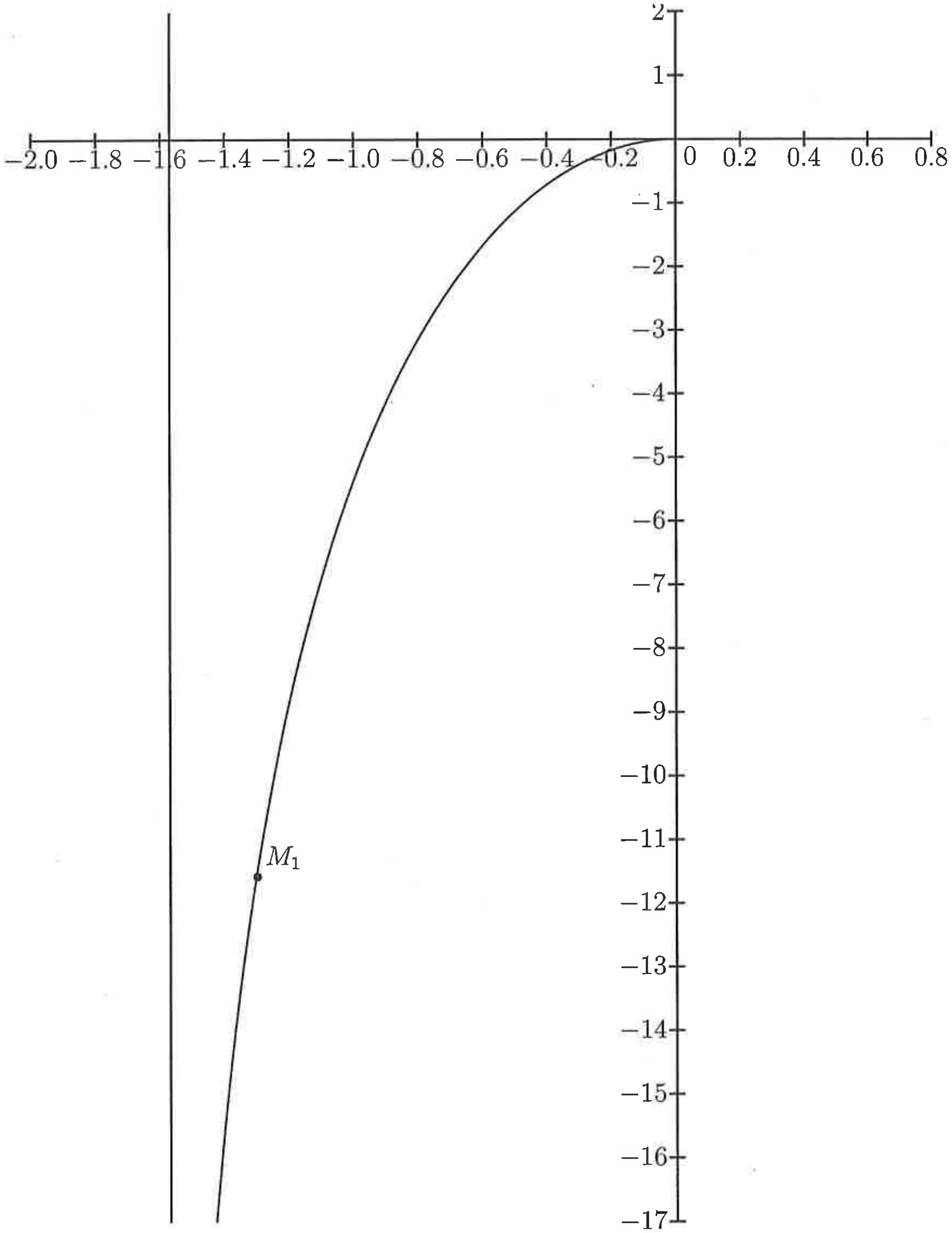
7. On admet que la fonction φ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$.

   La valeur de ω correspondant au point M_1 du document réponse est-elle :

   - stictement inférieure à 500 ?
   - égale à 500 ?
   - strictement supérieure à 500 ?

   On justifiera la réponse.

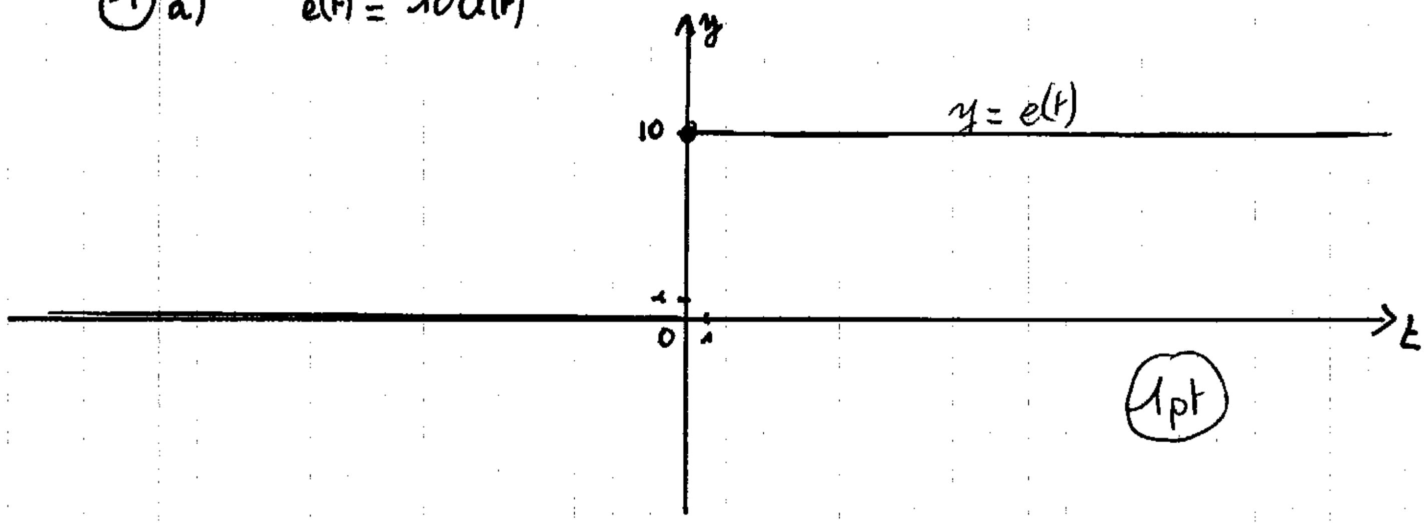
Document réponse



Correction du devoir

Partie A

1) a) $e(t) = 10\,\mathcal{U}(t)$



1pt

b) $E(p) = \mathcal{L}(e(t)) = \mathcal{L}(10\,\mathcal{U}(t)) = \dfrac{10}{p}$ 1pt

2) L'équation (E) est : $RC\,\dfrac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t)$

En prenant la transformée de Laplace on obtient :

$$RC\,\mathcal{L}(v'(t)) + \mathcal{L}(v(t)) = E(p)$$

$$\Leftrightarrow \quad RC\left(pV(p) - v(0^+)\right) + V(p) = \frac{10}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad RC\left(pV(p)\right) + V(p) = \frac{10}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad V(p)\left(RCp + 1\right) = \frac{10}{p}$$

Donc $\boxed{V(p) = \dfrac{10}{p(RCp+1)}}$ 3pts

3) a) On a : $\dfrac{10}{p} - \dfrac{10}{p + \frac{1}{RC}} = \dfrac{10}{p} - \dfrac{10RC}{RCp+1} = \dfrac{10(RCp+1) - 10RCp}{p(RCp+1)}$

$$= \frac{10}{p(RCp+1)} = V(p)$$

CQFD 1pt

b) Donc $V(p) = \frac{10}{p} - \frac{10}{p + \frac{1}{RC}}$

ainsi, en prenant $\mathcal{L}^{-1}$:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}(V(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{p}\right) - 10\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}\right)$$

$$v(t) = 10U(t) - 10\,e^{-\frac{1}{RC}t}\,U(t)$$

$$\boxed{v(t) = 10\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)U(t)}$$ (2pts)

pour $t>0$: $v(t) = 10(1 - e^{-t/RC})$ car $U(t) = 1$

Partie B

(1) $T(\omega) = \dfrac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{RjC\omega + 1}$ (on a multiplié le numérateur et le dénominateur par $RjC\omega$

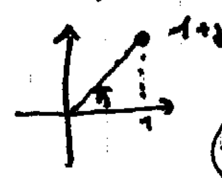
or $RC = \frac{1}{\omega_0}$ (car $\omega_0 = \frac{1}{RC}$)

Donc $$\boxed{T(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega.RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$ (1pt)

(2) D'après (1), $T(\omega_0) = \frac{1}{1+j}$ (1pt)

ainsi
- $|T(\omega_0)| = \frac{1}{|1+j|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (1pt)
- $\arg(T(\omega_0)) = \arg\left(\frac{1}{1+j}\right) = -\arg(1+j) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

car $\arg(1+j) = \frac{\pi}{4}$



(1p

③ (a) $|T(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ (1pt)

(b) $\arg(T(\omega)) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$ (1pt)

④ vérification : (a) : $|T(\omega_0)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ OK (1pt)

(b) : $\arg(T(\omega_0)) = -\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4}$ OK

⑤ $G_{db}(\omega) = \dfrac{20}{\ln(10)} \ln(|T(\omega)|)$

donc $G_{db}(\omega_0) = \dfrac{20}{\ln(10)} \ln(|T(\omega_0)|) = \dfrac{20}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= -\dfrac{20}{\ln(10)} \ln(\sqrt{2}) \simeq -3$ (1pt)

⑥ $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{500}\right)$

(a) $\varphi(\omega_0) = -\arctan\left(\dfrac{500}{500}\right) = -\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4}$ (1pt)

(b) $M_0 = M(500) = (\varphi(500) ; G_{db}(\omega_0)) = \left(-\dfrac{\pi}{4} ; -3\right) \simeq (-0{,}78 ; -3)$ ↑ environ

(voir document réponse) (1pt)

(c) L'ordonnée vaut environs -3. (1pt)

⑦ $M_1(-1{,}3 ; -11{,}6)$ d'après le graphique.

Donc $\varphi(\omega) \simeq -1{,}3$ or $\varphi(\omega_0) = -\dfrac{\pi}{4} \simeq -0{,}78$ $(\omega_0 = 500)$

Donc $\varphi(\omega) < \varphi(\omega_0)$

Donc $\omega > \omega_0$ car φ est strictement décroissante

c.à.d : $\omega > 500$ (1pt)

Donc ω est strictement supérieur à 500

4/4

Document réponse