Classe: 1SSI	Date: 8/10/2012	**Type**
Devoir n°4		**Devoir surveillé : 1 heure**
Thème: Suites		

Exercice 1

Etudier les variations des suites (u_n) définie par :

a) $u_n = \dfrac{3n}{2n+1}$ avec $n \geq 0$.

b) $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ avec $n \geq 1$.

Exercice 2

On considère une suite (u_n) telle que $u_2 = 36$ et $u_4 = 81$.

1- On admet dans cette question que (u_n) est une suite arithmétique.

a) Calculer son premier terme u_0 et sa raison r. Exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

2- On admet dans cette question que (u_n) est une suite géométrique de raison q positive.

a) Calculer son premier terme u_0 et sa raison q. Exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer $S_5 = u_0 + u_1 + ... + u_5$.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 3$ et $u_0 = 4$.

1°) Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2°) Pour tout entier n on pose $v_n = u_n + 6$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

3°) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Corrigé du devoir.

Exercice 1

a) Les variations sont données par le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} - \frac{3n}{2n+1}$$

$$= \frac{3n+3}{2n+3} - \frac{3n}{2n+1}$$

$$= \frac{(3n+3)(2n+1) - 3n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{6n^2+3n+6n+3-(6n^2+9n)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{6n^2+9n+3-6n^2-9n}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{3}{(2n+3)(2n+1)}$$

Or comme $n \in \mathbb{N}$, $2n+3>0$ et $2n+1>0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ (2,5)

La suite (u_n) est strictement croissante

b) Les variations de la suite (u_n) sont données par le signe de $u_{n+1} - u_n$.

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}$$

$$= \frac{2 \cdot 2^n n - (n+1)2^n}{(n+1)n}$$

$$= \frac{2^n [2n - (n+1)]}{(n+1)n}$$

$$= \frac{2^n (2n - n - 1)}{(n+1)n}$$

$$= \frac{2^n (n-1)}{(n+1)n}$$

or $n \geqslant 1$, donc $n-1 \geqslant 0$ et $n+1>0$ et $n>0$

Donc, comme $2^n > 0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est croissante. 2,5

Exercice 2 $\quad u_2 = 36$ et $u_4 = 81$

1°) On admet que (u_n) est une suite arithmétique.

a) Soit r la raison de la suite arithmétique :

$$u_3 = u_2 + r$$
$$u_4 = u_2 + 2r$$

Donc $81 = 36 + 2r$

d'où $2r = 81 - 36$

$$\boxed{r = \frac{81-36}{2} = \frac{45}{2}}$$ 1

or $u_0 + 2r = u_2$

Donc $\boxed{u_0 = u_2 - 2r = 36 - 45 = -9}$ 1

Comme (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -9$, de raison $r = \frac{45}{2}$

Donc

$$u_n = u_0 + nr$$
$$\boxed{u_n = -9 + n \times \frac{45}{2}}$$ 1

b) La suite (u_n) est arithmétique, donc

$$S_{10} = \left(\frac{u_0 + u_{10}}{2}\right) \times 11$$

avec $u_{10} = -9 + 5 \times 45 = 216$

1 $\boxed{S_{10} = \left(\frac{-9+216}{2}\right) \times 11 = \frac{207}{2} \times 11 = 1138,5}$

2°) a) Soit q sa raison.

On sait que : $u_3 = q u_2$

$$u_4 = q^2 u_2$$

Donc $81 = q^2 . 36$

d'où $q^2 = \frac{81}{36}$ 1

et comme $q>0$, $\boxed{q = \sqrt{\frac{81}{36}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}}$

Nous savons aussi que :

$u_2 = q^2 u_0$ donc $u_0 = \frac{u_2}{q^2} = \frac{36}{\frac{81}{36}}$

$u_0 = 36 \times \frac{36}{81} = \frac{1296}{81} = \frac{144}{9} = 16$

$\boxed{u_0 = 16}$ 1

Ainsi, d'après le cours :

$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n}$ 1

b) $S_5 = u_0 + u_1 + \dots + u_5 = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^5$

$S_5 = u_0 (1 + q + q^2 + \dots + q^5)$

$S_5 = 16 \cdot \left(\frac{1-q^6}{1-q} \right)$ (cours)

$S_5 = 16 \times \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^6}{1 - \frac{3}{2}} \right)$

$S_5 = 16 \times \left(\frac{1 - \frac{729}{64}}{1 - \frac{3}{2}} \right) = 16 \times \left(\frac{\frac{64-729}{64}}{\frac{2-3}{2}} \right)$

$S_5 = 16 \times \frac{-665}{64} \times \frac{2}{-1}$

$\boxed{S_5 = +\frac{665}{2} = 332,5}$ 1

Exercice 3 : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

1°) $u_0 = 4$

$u_1 = \frac{1}{2} \times u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 3 = -\frac{1}{2} - 3 = \frac{-7}{2}$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 3 = -\frac{7}{4} - 3 = -\frac{19}{4}$ (1)

$u_4 = \frac{1}{2}u_3 - 3 = -\frac{19}{8} - 3 = \frac{-19-24}{8} = -\frac{43}{8}$

2°) On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(v_n - 6) + 3 \quad \text{car } u_n = v_n - 6 \end{aligned}$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 3 + 3$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme (3)

$v_0 = u_0 + 6 = 10$

3°) Comme (v_n) est géométrique :

$$v_n = v_0 \cdot q^n = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{10}{2^n}$$ (1)

Or $u_n = v_n - 6$

donc $\boxed{u_n = \frac{10}{2^n} - 6}$ (2)