Classe: TS2ET	Date: 8/10/2012	**Type**
Devoir n°3		**Devoir surveillé**
Thème: Probabilités et équations différentielles.		

Exercice 1

Dans un atelier, deux machines M1 et M2, fonctionnant de manière indépendante, produisent des pièces de même type.

80% des pièces sont produites par M1.

20% des pièces sont produites par M2.

Parmi ces pièces, certaines sont défectueuses : c'est le cas pour 5 % des pièces produites par M1 et pour 4 % des pièces produites par M2 .
Dans cet exercice les résultats numériques seront, s'il y a lieu, arrondis à 10^{-3} près.

On prélève au hasard une pièce dans la production de l'atelier.
1°) Démontrer que la probabilité que cette pièce soit défectueuse est 0,048.
2°) Sachant que cette pièce est défectueuse, déterminer la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M1 .

Exercice 2

Une entreprise fabrique des rivets. Pour ces rivets, deux défauts de fabrication seulement sont possibles : un défaut de diamètre et un défaut de longueur.

Une étude statistique permet d'admettre que, pour un rivet choisit au hasard dans la production d'une journée, la probabilité de l'événement A : “le rivet possède un défaut de diamètre“ est P(A) = 0,02 et la probabilité de l'événement B : “le rivet possède un défaut de longueur“ est P(B) = 0,03.
On admet que les événements A et B son indépendants.
Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E1 : "le rivet possède les deux défauts".
E2 : "le rivet possède au moins un défaut".
E3 : "le rivet ne possède aucun des deux défauts".

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-3y'-4y=-5e^{-x}$
où y est une fonction de sa variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y''-3y'-4y=0$.
2°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=xe^{-x}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4°) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : f(0)=2 et f'(0)=-1

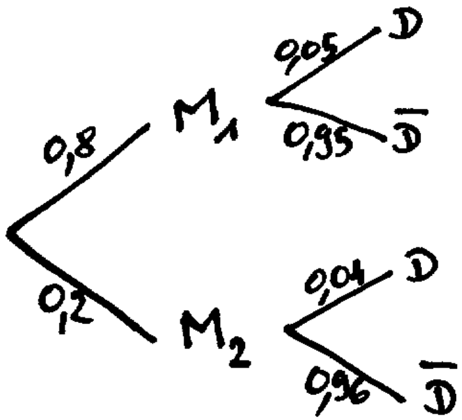
Exercice 1 (5pts)

1°) Faisons un arbre de probabilités :

M_1 = " La pièce provient de M_1 "

M_2 = " La pièce provient de M_2 "

D = " La pièce est défectueuse "



D'après l'arbre :

$$P(D) = 0{,}8 \times 0{,}05 + 0{,}2 \times 0{,}04$$

$$P(D) = 0{,}048$$

(2pts)

2°) On cherche $P_D(M_1)$

Or $P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}05}{0{,}048}$

Donc $P_D(M_1) = \dfrac{5}{6} \simeq 0{,}833$ à 10^{-3} près

(3pts)

Exercice 2 (6pts)

A = " le rivet possède un défaut de diamètre "

$P(A) = 0{,}02$

B = " le rivet possède un défaut de longueur "

$P(B) = 0{,}03$

Les événements A et B sont indépendants.

On a

* $E_1 = A \cap B$

Donc $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

car A et B sont indép.

D'où $\boxed{P(E_1) = 0{,}02 \times 0{,}03 = 0{,}0006}$ (2)

* $E_2 = A \cup B$

Donc $P(E_2) = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$P(E_2) = 0{,}02 + 0{,}03 - 0{,}0006$

$\boxed{P(E_2) = 0{,}0494}$ 2

* $E_3 = \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A\cup B}$

Donc $P(E_3) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B)$

$\boxed{P(E_3) = 1 - 0{,}0494 = 0{,}9506}$ 2

Exercice 3 (9pts)

1°) Résolution de (E_0) : $y'' - 3y' - 4y = 0$

Son équation caractéristique est : $r^2 - 3r - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 4\times4 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

Il y a deux solutions

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1 \\ r_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4 \end{cases}$$

2pts

Les solutions sont donc les fonctions :

$y_1(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x}$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R})$

2°) Montrons que $h(x) = xe^{-x}$ est solution de (E)

$h(x) = xe^{-x}$

$h'(x) = 1e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

$h''(x) = -1e^{-x} + (1-x)\times(-e^{-x}) = (-1-1+x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

Donc $h''(x) - 3h'(x) - 4h(x)$

$= (x-2)e^{-x} - 3(1-x)e^{-x} - 4xe^{-x}$

$= (x - 2 - 3 + 3x - 4x)e^{-x}$

$= -5e^{-x}$

3pts

Ainsi, $h(x)$ est bien solution de (E)

3°) D'après le cours, les solutions de (E) sont les fonctions : $\boxed{y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x} + xe^{-x}}$ 1pt

4°) f est une solution, donc $f(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x} + xe^{-x}$

or $f(0) = 2$ donc $\boxed{\lambda + \mu = 2}$ (1)

$f'(x) = -\lambda e^{-x} + 4\mu e^{4x} + (1-x)e^{-x}$

donc $f'(0) = -1$ s'écrit : $-\lambda + 4\mu + 1 = -1$

$\boxed{-\lambda + 4\mu = 2}$ (2)

En faisant (1)+(2) :

$$5\mu = 4 \quad \text{donc} \quad \mu = \frac{4}{5}$$

D'après (1), si $\mu = \frac{4}{5}$ $\quad \lambda = 2 - \mu$

$$\lambda = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

Conclusion :

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{6}{5}e^{4x} + xe^{-x}}$$

3pts