Classe: 1SSI	Date: 17 septembre 2012	**Type** **devoir maison**
Devoir n°1		
Thème: Suites		

Exercice 1

Dans chaque cas, répondre par vrai ou faux et expliquer brièvement votre réponse.

1°) $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+n^2$

a) La suite (u_n) est croissante. Vrai-Faux

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 0$ Vrai-Faux

2°) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{n^2}{2^n}$

a) Si $n\geqslant 3$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ Vrai-Faux

b) Si $n\geqslant 3$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ Vrai-Faux

c) Si $n\geqslant 3$, la suite est croissante; Vrai-Faux

3°) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{n}{(1+n^2)}$

a) La suite est croissante. Vrai-Faux

b) 1 est un minorant. Vrai-Faux

4°) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n=(-1)^{2n+1}$.

a) La suite est croissante. Vrai-Faux

b) La suite est décroissante. Vrai-Faux

c) La suite est constante. Vrai-Faux

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par:

$u_n=\dfrac{2n+1}{n}$

1°) Étudier les variations de cette suite.

2°) Montrer que la suite est minorée par 2.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par:

$u_0=2$ et $u_{n+1}=u_n^2+u_n$

Étudier les variations de cette suite

Corrigé

1°) a) Vrai 0,5+0,5

car $u_{n+1} = u_n + n^2$

donc $u_{n+1} - u_n = n^2 \geqslant 0$

1°) b) Vrai 0,5+0,5

car (u_n) et croissante et $u_0 = 1 \geqslant 0$

2°) a) Faux 0,5+0,5

car $u_4 = \frac{4^2}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$

$u_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$

donc $\frac{u_4}{u_3} = \frac{1}{\frac{9}{8}} = \frac{8}{9} < 1$

C'est faux déjà pour $n = 3$

2°) b) Vrai 0,5 + 1,5

car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

or, si $n \geqslant 3$ alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2$

car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{16}{9}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \times \frac{16}{9}$

c.à.d: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{4}{9} < 1$

CQFD

2°c) FAUX 0,5 + 0,5

car $u_3 = 1{,}125$
$u_4 = 1$

Elle ne peut pas être croissante à partir de $n=3$

3° a) FAUX 0,5 + 0,5

car $u_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
$u_2 = \frac{2}{5} = 0{,}4$

(u_n) ne peut pas être croissante

3° b) FAUX 0,5 + 0,5

car $u_1 = 0{,}5 < 1$
donc 1 n'est pas un minorant !

4°) $u_n = (-1)^{2n+1}$

or $2n+1$ est un entier impair, donc (u_n)

est constante, égale à -1.

4°a) VRAI car une suite constante est croissante 0,5+0,5

b) VRAI car une suite constante est aussi décroissante 0,5+0,5

c) VRAI 0,5+ 0,5

Exercice 2

$u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$

1°) On calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n}$$

$$= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n}$$

$$= \frac{n(2n+3) - (2n+1)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2+3n-(2n^2+2n+n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2n^2+3n-2n^2-3n-1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)}$$

or $n>0$, donc $n+1>0$

Donc $u_{n+1}-u_n < 0$

La suite (u_n) est strictement décroissante.

3pts

2°) Je remarque que :

$$u_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

or $\frac{1}{n} > 0$, donc $2+\frac{1}{n} > 2$

c'est à dire :

$u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Cela signifie que (u_n) est minorée par 2.

3pts

Exercice 3

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$

Donc : $u_{n+1} - u_n = u_n^2$

Or $u_n^2 \geq 0$, ainsi $u_{n+1}-u_n \geq 0$

La suite (u_n) est donc croissante

3pts