43 Un peu d'économie

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 €.

Partie A. Coût de production unitaire

Le coût de production unitaire $U(x)$ exprimant le coût de production par objet produit est $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour $x \in I$ où $I = [10\,;100]$.

1. a. Étudier la fonction U sur I et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ en prenant pour unités 1 cm pour 5 objets et 1 cm pour 10 €.

b. Déterminer pour quelle production le coût unitaire est le plus bas. Déterminer alors le bénéfice de l'entreprise.

2. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production unitaire inférieur ou égal à 80 €.

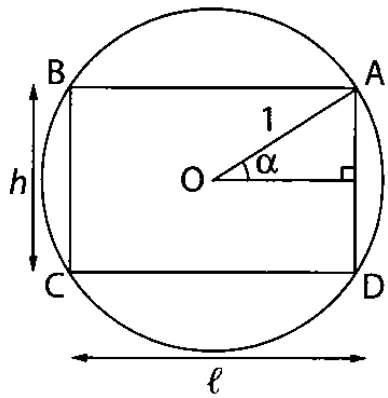
Partie B. Étude du bénéfice

1. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.

2. Déterminer son sens de variation sur [10 ; 100] et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice ?

44 Résistance d'une poutre

Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipédique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $\ell \times h^2$ où ℓ et h sont les deux dimensions ci-contre :
On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre.



1. Montrer que $h^2 = 4 - \ell^2$.

2. En déduire que $\ell h^2 = -\ell^3 + 4\ell$.

3. Soit $f(x) = -x^3 + 4x$ pour $x \geqslant 0$.

a. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

b. Comment choisir ℓ et h pour que la poutre résiste au mieux à la flexion ?

4. Quel est l'angle α correspondant à 0,1° près ?

Exercice n°43 page 118 (12 pts)

Partie A : Coût de production unitaire

1a) $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour $x \in [10 ; 100]$

Etudions les variations de U

Les variations de U sont données par le signe de $U'(x)$.

$$U'(x) = 1 - 0 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2 - 900}{x^2}$$

Donc $U'(x)$ est du signe de $x^2 - 900$, qui est un polynôme de degré 2, donc du signe de $a = 1$ sauf entre les racines :

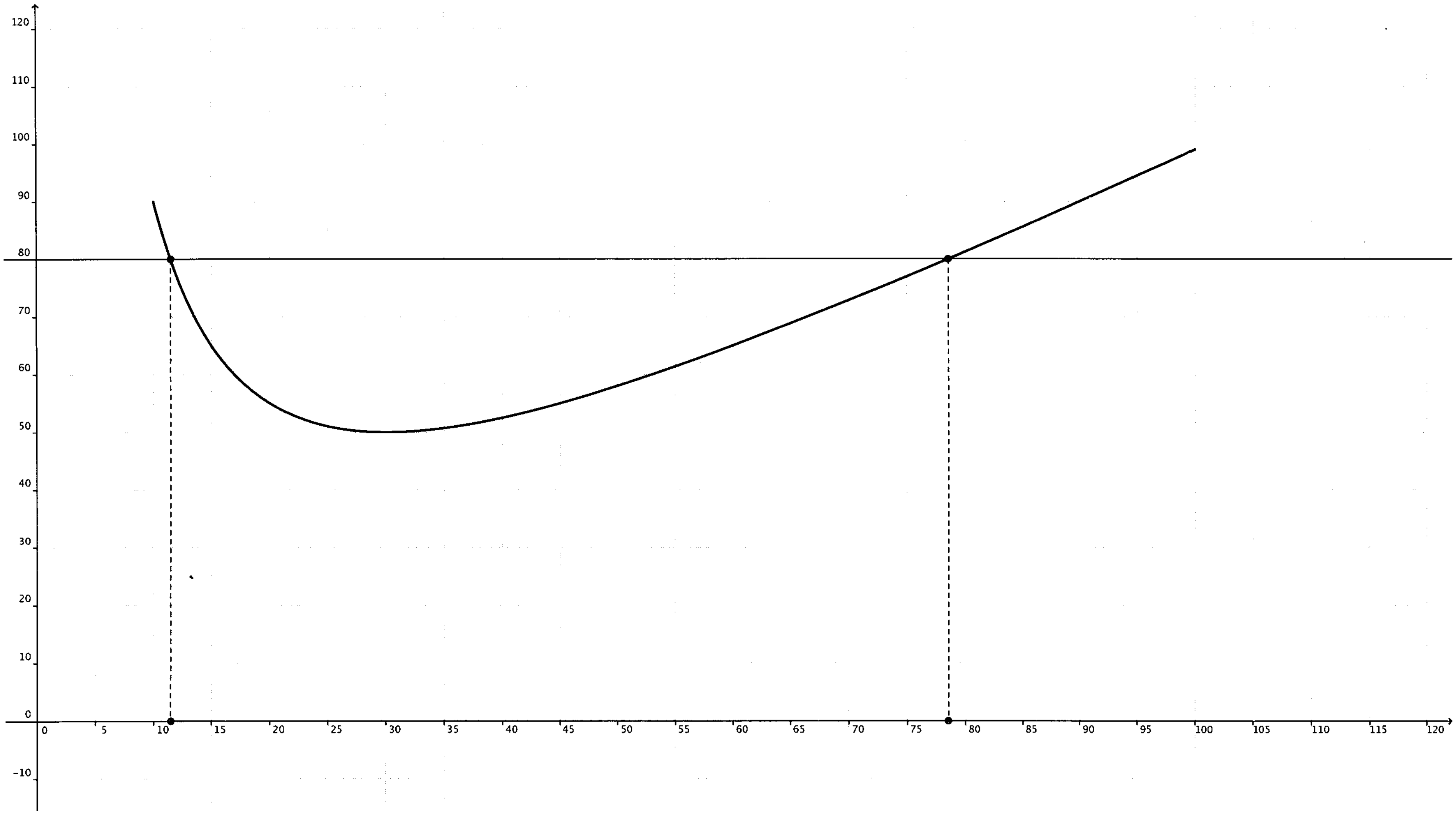
$$x^2 - 900 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 900 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{900} \Leftrightarrow x = \pm 30$$

D'où le tableau des variations de U.

x	10		30		100
$U'(x)$		$-$	0	$+$	
$U(x)$	90	$\searrow$	50	$\nearrow$	99

Echelle en cm: 1:5 (x), 1:10 (y)



1b) D'après l'étude précédente, le coût unitaire est le plus bas pour $\underline{x = 30 \text{ objets}}$. Dans ce cas le bénéfice de l'entreprise est :

$$\text{bénéfice} = \underbrace{100 \times 30}_{\substack{\text{ce que rapporte} \\ \text{la vente de} \\ \text{30 objets}}} - \underbrace{30 \times U(30)}_{\substack{\text{le coût de} \\ \text{fabrication des} \\ \text{30 objets}}}$$

$$\text{bénéfice} = 3000 - 30 \times 50 = 1500$$

<u>Le bénéfice est alors de 1500 €</u>

2°) D'après le graphique, il faudrait fabrique entre 12 et 78 objets pour avoir un coût de production inférieur ou égal à 80 €.

<u>Partie B</u> 1°) Le bénéfice global de l'entreprise lorsqu'elle fabrique x objets est :

$$B(x) = \underbrace{100x}_{\substack{\text{ce que rapporte} \\ \text{la vente de} \\ x \text{ objet}}} - \underbrace{x\,U(x)}_{\substack{\text{coût de production} \\ \text{des } x \text{ objets}}}$$

$$B(x) = 100x - x\left(x - 10 + \frac{900}{x}\right)$$

$$B(x) = 100x - x^2 + 10x - 900$$

Donc $\boxed{B(x) = -x^2 + 110x - 900}$

2°) <u>Etudions les variations de $B(x)$ pour</u> $x \in [10;100]$

Les variations sont données par le signe de $B'(x)$

$$B'(x) = -2x + 110.$$

$$B'(x) = 0 \iff -2x + 110 = 0 \iff x = 55$$

x	10		55		100
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	100	↗	2125	↘	100

Donc le bénéfice est maximal pour $x = 55$ objets fabriqués. Ce bénéfice sera de 2125 €.

<u>Exercice n°44 page 118</u> (8pts)

1°) Dans le triangle OHA rectangle en H :

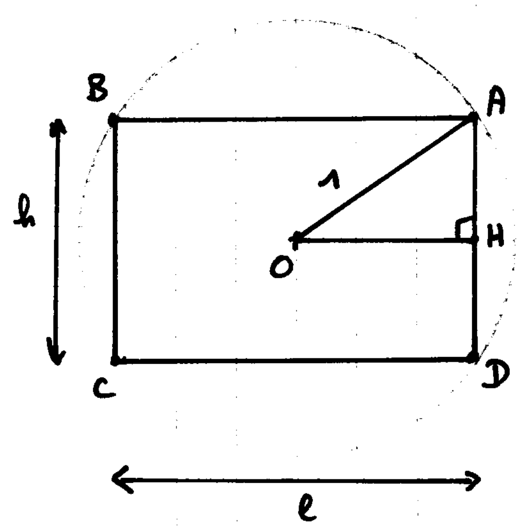
$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

Donc $1^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$

c.a.d: $1 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{h^2}{4}$

Donc $4 = \ell^2 + h^2$

d'où $\boxed{h^2 = 4 - \ell^2}$



2°) Comme $h^2 = 4 - \ell^2$ donc $\ell h^2 = 4\ell - \ell^3$
c'est à dire :

$$\ell h^2 = -\ell^3 + 4\ell$$

3°) $f(x) = -x^3 + 4x$ pour $x \geqslant 0$

a) Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 4$$

$f'(x)$ est donc du signe de $-3x^2+4$, qui est un polynôme de degré 2, donc du signe de $a = -3$ sauf entre les racines :

$$-3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

D'où le tableau des variations de f.

x	0		$\frac{2}{3}\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	

$f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \simeq 3{,}079$

b) La poutre résiste au mieux à la flexion lorsque $\ell h^2 = -\ell^3 + 4\ell = f(\ell)$ ... est maximum.

Donc pour $\boxed{\ell = \frac{2}{3}\sqrt{3} \simeq 1{,}15}$

Dans ce cas $\boxed{h = \sqrt{4 - \ell^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \simeq 1{,}63299}$

4°) L'angle α vérifie :

$$\cos(\alpha) = \frac{\ell}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donc $\alpha \simeq \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 54{,}7°$ à $0{,}1°$ près.