| Classe:1SSI | Date: 25/03/13 | **Type** |
|---|---|---|
| **Devoir n°13** | | **Devoir maison pour le 3/4/13** |
| Thème: *Géométrie analytique* | | |

## Exercice 1 :

On considère un triangle AGF quelconque.

1. Placer les points B et C tels que : $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{GC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$ .

2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés :

(a) En utilisant le calcul vectoriel ;

(b) En choisissant un repère du plan.

## Exercice 2 :

Soient A(2 ;3), B(6;1), C(5;-9), D(-2;-5) et E(0;5).

1°) Déterminer une équation cartésienne de (AB).

2°) Déterminer une équation de la droite (d) parallèle à (AB) passant par C. Passe-t-elle par le point D ?

3°) Que peut-on en déduire concernant les droites (AB) et (CD) ?

4°) Donner une équation cartésienne de (ED).

5°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre (AB) et (ED).

## Exercice 3 :

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Toute réponse sera soigneusement justifiée.

1) Le plan est muni d'un repère. Soit m un réel et $(D_m)$ l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient la relation : $m^2x-(m-1)y-1=0$

a) Justifier que pour toute valeur de m , l'ensemble $(D_m)$ est une droite.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de m, la droite passe-t-elle par le point A(-1;1) ?

Donner l'(les) équation(s) de droite(s) obtenue(s) avec ces valeurs.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de m, le vecteur $\vec{u}(1;4)$ est-il un vecteur directeur de la (les) droite(s) $(D_m)$ ?

d) La droite $(D_m)$ peut-elle être parallèle à la droite (D) d'équation : 5x-3y+4=0 ?

2) Soit m un réel et soit $(\Delta_m)$ la droite d'équation : mx-(m-1)y-1=0

Montrer que les droites $(\Delta_m)$ passent par un point fixe pour toute valeur de m. Déterminer les coordonnées de F.

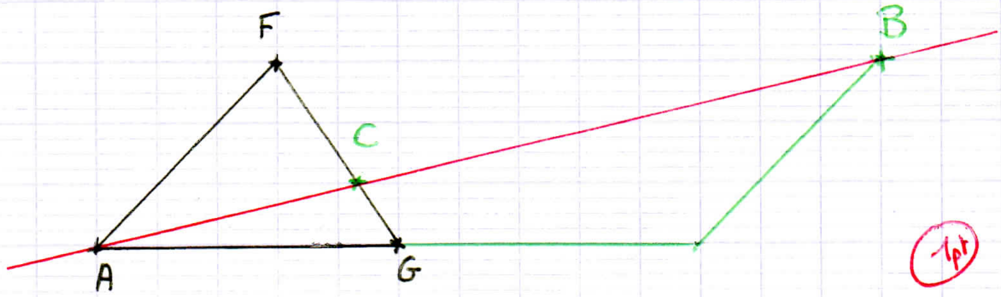
# Correction du devoir

## Exercice 1

1°)

$\vec{AB} = 2\vec{AG} + \vec{AF}$

$\vec{GC} = \frac{1}{3}\vec{GF}$




2°) (a) Pour montrer que les points A, B et C sont alignés, je vais exprimer les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ à l'aide des vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{AF}$ (vecteurs de bases) et puis vérifier qu'ils sont colinéaires

Nous avons : $\boxed{\vec{AB} = 2\vec{AG} + \vec{AF}}$ (d'après l'énoncé)

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
\vec{AC} &= \vec{AG} + \vec{GC} && \text{(Chasles)}\\
&= \vec{AG} + \frac{1}{3}\vec{GF} && \text{(par hypothèse)}\\
&= \vec{AG} + \frac{1}{3}(\vec{GA} + \vec{AF}) && \text{(Encore Chasles)}\\
&= \vec{AG} + \frac{1}{3}\vec{GA} + \frac{1}{3}\vec{AF}\\
&= \left(1 - \frac{1}{3}\right)\vec{AG} + \frac{1}{3}\vec{AF}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AG} + \frac{1}{3}\vec{AF}}$

Je constate que $\vec{AC} = \frac{1}{3}(2\vec{AG} + \vec{AF}) = \frac{1}{3}\vec{AB}$

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, les points A, B et C sont donc alignés.

2pts

(b) En prenant le repère $(A, \vec{AG}, \vec{AF})$ on a :

$A(0;0)$ $G(1,0)$ $F(0;1)$

Donc $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AF}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{GF}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

* ainsi $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ car $\vec{AB} = 2\vec{AG} + \vec{AF}$

D'où $\boxed{B(2;1)}$

* $\vec{GC} = \frac{1}{3}\vec{GF}$ donc $\vec{GC}\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\end{pmatrix}$

or $\vec{GC}\begin{pmatrix}x_c - 1\\y_c\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x_c - 1 = -\frac{1}{3}\\ y_c = \frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_c = \frac{2}{3}\\ y_c = \frac{1}{3}\end{cases}$

Donc $\boxed{C\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)}$

On détermine les coordonnées de B et de C.

Vérifions que les points A, B et C sont alignés

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Donc $\frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{AC}$ donc les points A, B et C sont alignés.

2 pts

**Exercice 2** $A(2;3)$ $B(6;1)$ $C(5;-9)$ $D(-2;-5)$ et $E(0;5)$ (voir figure en annexe)

1°) Equation cartésienne de (AB)

$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \vec{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow -2(x-2) - 4(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 4 - 4y + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y - 8 = 0$

Une équation de (AB) est donc : $\boxed{x + 2y - 8 = 0}$ 1pt

---

2°/ • Comme d est parallèle à (AB) elle aura une équation du type:

$$x + 2y + c = 0$$

• Comme d passe par $C(5;-9)$ : $5 + 2\times(-9) + c = 0$

$\Leftrightarrow 5 - 18 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 13$

conclusion: Une équation cartésienne de d est:

$$\boxed{x + 2y + 13 = 0}$$

Vérifions si D passe par (d). $D(-2;-5)$

On a : $x_D + 2y_D + 13 = -2 - 10 + 13 = 1 \neq 0$

Donc $\boxed{D \notin (d)}$ 1,5pt

---

3°) Comme (d) est la droite parallèle à (AB) et passant par C et que $D \notin (d)$, on peut en déduire que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

0,5 pt

4°) <u>Equation cartésienne de (ED)</u>

$M(x;y) \in (ED) \Leftrightarrow \vec{EM}\begin{pmatrix} x \\ y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{ED}\begin{pmatrix} -2 \\ -10 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow -10(x) + 2(y-5) = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x - (y-5) = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x - y + 5 = 0$$

<u>conclusion :</u> (ED) a pour équation : $\boxed{5x - y + 5 = 0}$

1pt

---

5°) $M(x;y) \in (AB) \cap (ED)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 5x - y + 5 = 0 \end{cases}$ ← car $M(x,y) \in (AB)$ ← car $M(x,y) \in (ED)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 8 \\ 5(-2y+8) - y + 5 = 0 \end{cases}$ On procède par substitution

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y+8 \\ -10y + 40 - y + 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 8 \\ -11y + 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y+8 \\ y = \frac{45}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{90}{11} + 8 \\ y = \frac{45}{11} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-90 + 88}{11} \\ y = \frac{45}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{11} \\ y = \frac{45}{11} \end{cases}$

Le point d'intersection I de (AB) et (ED) a pour coordonnées : $\boxed{I\left(-\frac{2}{11} ; \frac{45}{11}\right)}$

2pts

# Exercice 3

1°) a) Rappel : L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ avec $a$, $b$ et $c$ des réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$ est une droite du plan.

$(D_m)$ a pour équation : $m^2x-(m-1)y-1=0$

$(D_m)$ est une droite à condition que les deux coefficients $m^2$ et $m-1$ ne s'annulent pas simultanément :

or si $m-1=0$ alors $m=1$ et donc $m^2\neq 0$

Donc $m^2$ et $m-1$ ne s'annulent pas simultanément, donc pour tous réels $m$, $(D_m)$ est une droite.

1pt

b) La droite $(D_m)$ passe par $A(-1;1)$

$\Leftrightarrow\quad m^2x_A-(m-1)y_A-1=0$

$\Leftrightarrow\quad -m^2-(m-1)-1=0$

$\Leftrightarrow\quad -m^2-m+1-1=0$

$\Leftrightarrow\quad -m^2-m=0$ (équation de degré 2)

$\Leftrightarrow\quad m^2+m=0$

$\Leftrightarrow\quad m(m+1)=0$

$\Leftrightarrow\quad m=0$ ou $m=-1$

2pts

Il y a donc deux droites $(D_m)$ qui passent par $A(-1;1)$

$$\boxed{\begin{array}{ll}(D_0): & y-1=0\\ (D_{-1}): & x+2y-1=0\end{array}}$$

1pt

c) Un vecteur directeur de $(D_m)$ est : $\vec{v}\begin{pmatrix}m-1\\m^2\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(D_m)$

$\Leftrightarrow\quad \vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m-1\\m^2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \quad m^2 - 4(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad m^2 - 4m + 4 = 0$ (équation de degré 2)

$\Leftrightarrow \quad (m-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad m = 2$

2pts

Conclusion : La seule valeur $m$ telle que $\vec{u}\binom{1}{4}$ soit un vecteur directeur de $(D_m)$ est $m = 2$.

d) $(D) : 5x - 3y + 4 = 0$

$(D_m) : \quad m^2 x - (m-1)y - 1 = 0$

Vecteur directeur de $(D)$ : $\vec{u_D}\binom{3}{5}$

Vecteur directeur de $(D_m)$ : $\vec{u_m}\binom{m-1}{m^2}$

Donc : $(D) \parallel (D_m)$

$\Leftrightarrow \quad \vec{u_D}$ et $\vec{u_m}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \quad 3m^2 - 5(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3m^2 - 5m + 5 = 0$ (équation de degré 2)

$\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 5 = -35$

$\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution.

conclusion : $(D_m)$ ne sera jamais parallèle à $(D)$ 1pt

---

2°) Analyse : Si $(\Delta_m)$ passe par un point fixe, ce point sera sur $\Delta_0 : y - 1 = 0$ et sur $\Delta_1 : x - 1 = 0$

Or l'intersection de ce deux droites est le point $F(1;1)$.

Ainsi, s'il y a un point fixe, ce sera $F(1;1)$

Synthèse : Montrons que $F(1;1)$ est un point de $(\Delta_m)$ pour toute valeur de $m$.

$m x_F - (m-1) y_F - 1$

$= m - (m-1) - 1 = m - m + 1 - 1 = 0$

Donc $\boxed{F(1;1) \in (\Delta_m)}$ et ceci pour tout réel $m$ 2pts

<u>Annexe</u> : figure exercice 2 .