<u>Devoir n°12(sujet A)</u>

Exercice 1: Polynômes et inéquations (5 points)

On considère le polynôme P défini par: $P(x)=2x^3-7x-2$.

1- Montrer que: $P(x)=(x-2)(2x^2+4x+1)$.

2- Résoudre l'équation $P(x)=0$.

3- Etudier le signe de P(x) et en déduire les solutions de l'inéquation : $P(x)<0$.

Exercice 2: Un problème (4 points)

Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Une allée de 3 mètres l'entoure et l'aire totale de la pelouse et de l'allée fait 360 m^2 .
Quelles sont les dimensions de la pelouse?

Exercice 3: Vrai ou faux ? (4 points)

(Une réponse exacte rapporte 1 point, un réponse inexacte enlève 0,5 point)

Dans cet exercice, f(x) désigne le polynôme ax^2+bx+c , avec $a\neq 0$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses

1°) Si pour tout réel x, $f(x)<0$, alors $\Delta<0$.

2°) Si pour tout réel x, $f(x)>0$, alors $\Delta>0$.

3°) Soit a un réel.
L'équation $ax^2-ax+1=0$ admet deux solutions distinctes lorsque $a<0$.

4°) Soit a un réel.
L'équation $ax^2-ax+1=0$ admet deux solutions distinctes lorsque $a>4$.

Exercice 4: Equations et inéquations (4 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sin(x)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

2°) Résoudre dans [0;2π] l'inéquation: $\cos(x)\leqslant-\frac{1}{2}$.

Exercice 5: Formules (3 points)

Ecrire chaque expression en fonction de cos(x) et sin(x):

$A=\cos(\pi+x)+2\cos(-2\pi+x)+3\cos(3\pi+x)$.

$B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(x+\pi)$.

$C=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin(x-\pi)+\sin(x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction

Sujet A

Exercice 1 (5pts)

1°) On a :

$$(x-2)(2x^2+4x+1)$$
$$= 2x^3+4x^2+x-4x^2-8x-2$$
$$= 2x^3-7x-2$$
$$= P(x)$$

Donc $P(x) = (x-2)(2x^2+4x+1)$ (1,5pts)

2°) $P(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2+4x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $2x^2+4x+1=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou

on calcule $\Delta = 16-4\times 2 = 8$

Deux solutions

$x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{8}}{4} = \dfrac{-4-2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=2 \text{ ou } x = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}}$ (1,5 pts)

3°) Faisons un tableau de signe : $P(x) = (x-2)(2x^2+4x+1)$

$x_1 \simeq -1{,}71$
$x_2 \simeq -0{,}29$

x	$-\infty$		x_1		x_2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

car un polynôme de degré 2 est du signe de $a=2$ sauf entre les racines x_1 et x_2

(1,5 pts)

Donc :

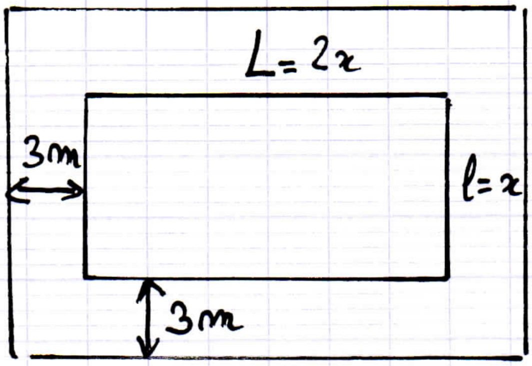
$$\boxed{P(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; 2[}$$

(0,5 pt)

Sujet A

Exercice 2

(4pts)



(1 point pour figure claire)

- <u>Choix des inconnues</u>

  x : la largeur de la pelouse en m.

- <u>Mise en équation</u>

  l'aire totale vaut : 360 m²

  l'aire totale vaut aussi : $(2x+6)(x+6)$

  Donc $(2x+6)(x+6) = 360$

- <u>Résolution</u>

$$(2x+6)(x+6) = 360$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 6x + 36 = 360$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 18x - 324 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x - 162 = 0$$

$$\Delta = 9^2 + 4 \times 162 = 729 = 27^2$$

Il y a deux solutions

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-9-27}{2} = -18 & \text{(impossible car } x > 0\text{)} \\ x_2 = \dfrac{-9+27}{2} = 9 \end{cases}$$

- <u>Conclusion</u>

  La seule solution qui convient est $x = 9$

  Les dimensions de la pelouse sont donc :

  9m × 18 m.

4pts

Sujet A

Exercice 3

(4pts)

1°) Vrai — car dans ce cas, $f(x)$ n'a pas de racines, donc $\Delta < 0$

2°) Faux — car dans ce cas $f(x)$ n'a pas de racines donc $\Delta < 0$.

3°) Vrai

4°) Vrai

car le discriminant vaut :

$\Delta = (-a)^2 - 4a = a^2 - 4a$

$\Delta = a(a-4)$ ← ceci est un polynôme de degré 2 en a, dont les racines sont 0 et 4

Tableau de signe

a		0		4	
$\Delta = a(a-4)$	+	0	−	0	+

Donc si $a<0$, $\Delta > 0$
et si $a>4$, $\Delta > 0$

+1 par réponse exacte
−0,5 par réponse fausse.

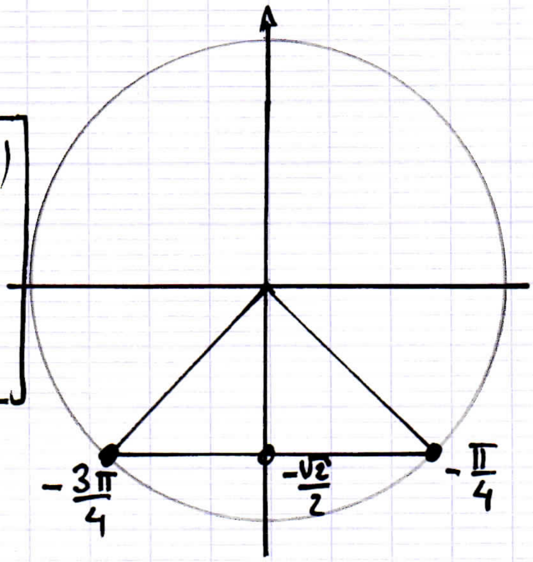
Sujet A

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ (4pts)

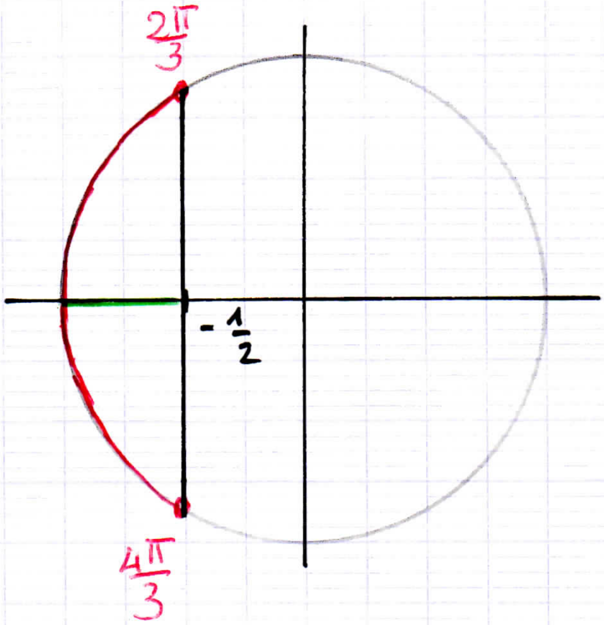
1°) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$$

(2pts)



2°) Dessinons le cercle trigonométrique



Donc $\cos(x) \leq -\frac{1}{2}$ $(x \in [0; 2\pi])$

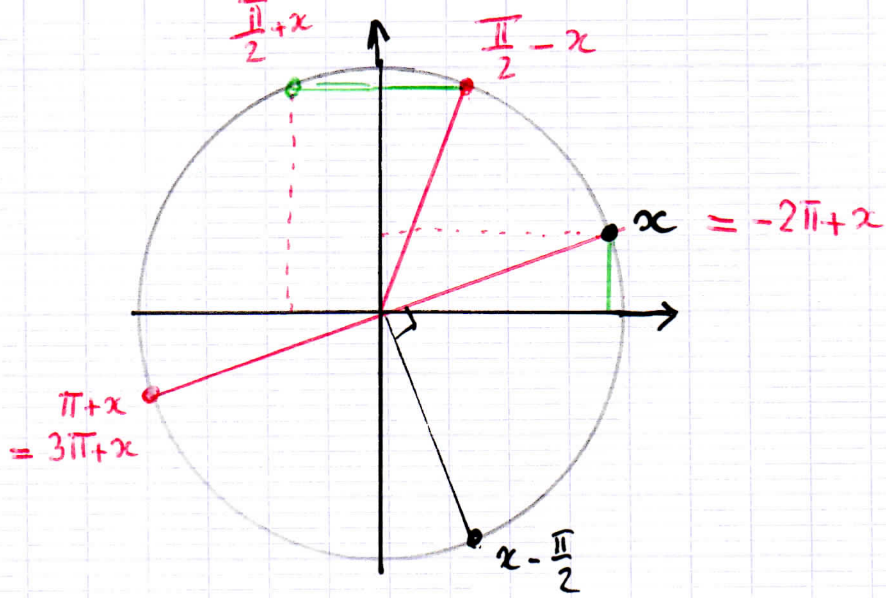
pour $\boxed{x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]}$

(2pts)

Sujet A

Exercice 5

(3pts)



$$A = \cos(\pi + x) + 2\cos(-2\pi + x) + 3\cos(3\pi + x)$$
$$= -\cos(x) + 2\cos(x) - 3\cos(x)$$
$$= -2\cos(x)$$

$$\boxed{A = -2\cos(x)}$$ (1pt)

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x + \pi)$$
$$= \cos(x) - \cos(x)$$
$$= 0$$

$$\boxed{B = 0}$$ (1pt)

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(x - \pi) + \sin(x + \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin(x) + \sin(x) - \sin(x) + \sin(x)$$
$$= 0$$

$$\boxed{C = 0}$$ (1pt)

<u>Devoir n°12(sujet B)</u>

Exercice 1: Polynômes et inéquations (5 points)

On considère le polynôme P défini par: $P(x)=2x^3-5x+3$.

1- Montrer que: $P(x)=(x-1)(2x^2+2x-3)$.

2- Résoudre l'équation $P(x)=0$.

3- Etudier le signe de $P(x)$ et en déduire les solutions de l'inéquation : $P(x)<0$.

Exercice 2: Un problème (4 points)

Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Une allée de 2 mètres l'entoure et l'aire totale de la pelouse et de l'allée fait 240 m^2 .
Quelles sont les dimensions de la pelouse?

Exercice 3: Vrai ou faux ? (4 points)

(Une réponse exacte rapporte 1 point, un réponse inexacte enlève 0,5 point)

Dans cet exercice, f(x) désigne le polynôme ax^2+bx+c , avec $a\neq 0$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses

1°) Si pour tout réel x, $f(x)>0$, alors $\Delta>0$.
2°) Si pour tout réel x, $f(x)<0$, alors $\Delta<0$.
3°) Soit a un réel.
L'équation $ax^2-ax+1=0$ admet deux solutions distinctes lorsque $a>4$.
4°) Soit a un réel.
L'équation $ax^2-ax+1=0$ admet deux solutions distinctes lorsque $a<0$.

Exercice 4: Equations et inéquations (4 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\cos(x)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

2°) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation: $\sin(x)\leqslant-\frac{1}{2}$.

Exercice 5: Formules (3 points)

Ecrire chaque expression en fonction de cos(x) et sin(x):

$A=\cos(\pi+x)+2\cos(-2\pi+x)+2\cos(3\pi+x)$.

$B=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(x+\pi)$.

$C=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x-\pi)-\sin(x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Correction

Sujet B

Exercice 1 (5 pts)

1°) On a :

$$(x-1)(2x^2+2x-3)$$
$$= 2x^3+2x^2-3x-2x^2-2x+3$$
$$= 2x^3-5x+3$$
$$= P(x)$$

(1,5 pts)

Donc $P(x) = (x-1)(2x^2+2x-3)$

2°) $P(x)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x-3)=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ ou $2x^2+2x-3=0$

Résolvons $2x^2+2x-3=0$: $\Delta = 4-4\times2\times(-3) = 4+24$

$\Delta = 28 = 4\times 7$

Il y a deux solutions

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{4\times7}}{4} = \dfrac{-2-2\sqrt{7}}{4} = \boxed{\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}} \simeq -1,82 \\ x_2 = \boxed{\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}} \simeq 0,82 \end{cases}$$

Ainsi : $P(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $2x^2+2x-3=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x=1 \text{ ou } x=x_1 \text{ ou } x=x_2}$

(1,5 pts)

3°) Faisons un tableau de signe : $P(x) = (x-1)(2x^2+2x-3)$
(car $P(x)$ est sous forme de produit)

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+2x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

car un polynôme de degré 2 est du signe de $a=2$ sauf entre les racines x_1 et x_2

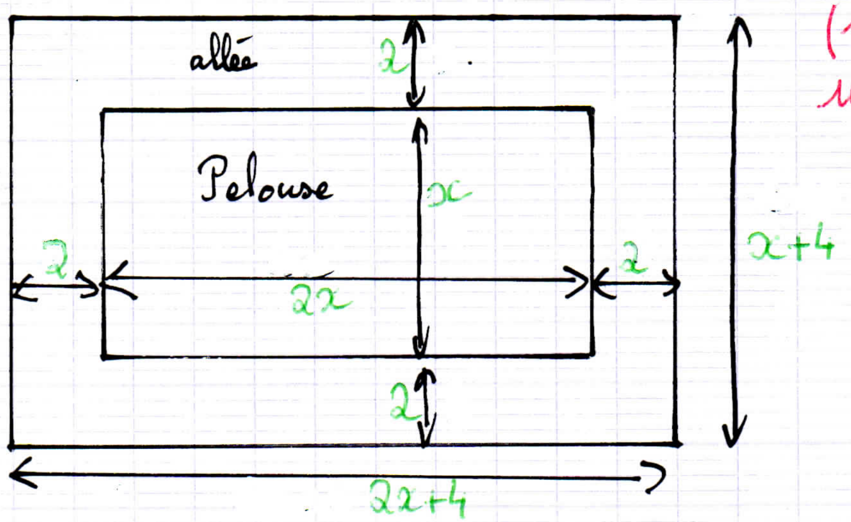
(1,5 pts)

Donc : $\boxed{P(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;1[}$ (0,5 pt)

Sujet B

Exercice 2 On commence par faire une figure.

(4 pts)



(1 pt pour une figure claire)

- **Choix des inconnues** : x : largeur de la pelouse en m.

- **Mise en équation** : l'aire totale vaut : $240\,m^2$ (d'après l'énoncé)
  l'aire totale vaut aussi : $(2x+4)\times(x+4)$ (voir fig)

  Donc : $(2x+4)(x+4) = 240$

- **Résolution** :

$$(2x+4)(x+4) = 240$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+8x+4x+16 = 240$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+12x-224 = 0$$
$$\Delta = 12^2+4\times2\times224 = 1936 = 44^2$$

Il y a deux solutions : $x_1 = \frac{-12-44}{4} = -14$ (impossible car $x>0$)

$x_2 = \frac{-12+44}{4} = 8$

- **Conclusion** : La seule dimension qui convient est $x = 8$
  Les dimensions de la pelouse sont donc :
  $8\,m \times 16\,m$.

4 pts

Sujet B

Exercice 3

(4pts)

1°) faux — car si pour tout x $f(x)>0$, alors f n'a pas de racines, donc $\Delta<0$

2°) Vrai — car si $f(x)<0$ pour tout x alors f n'a pas de racines, donc $\Delta<0$

3°) Vrai

4°) Vrai

Le discriminant de l'équation $ax^2-ax+1=0$ vaut : $\Delta=(-a)^2-4a\times1=a^2-4a$

$\Delta=a(a-4)$

Ceci est un polynôme de degré 2 en a dont les racines sont 0 et 4

d'où le tableau de signe de Δ

a		0		4	
Δ	+	0	−	0	+

Donc si $a>4$, $\Delta>0$

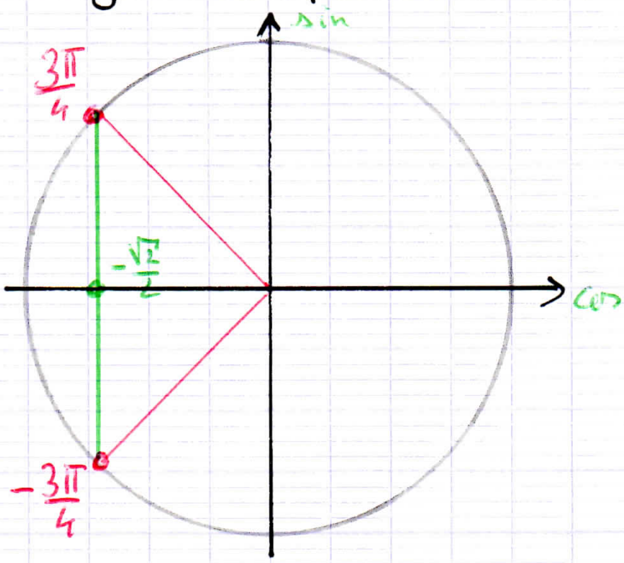
et si $a<0$, $\Delta>0$

+1 par réponse exacte

−0,5 par réponse fausse.

Sujet B

Exercice 4 (4pts) 1°) Dessinons le cercle trigonométrique :



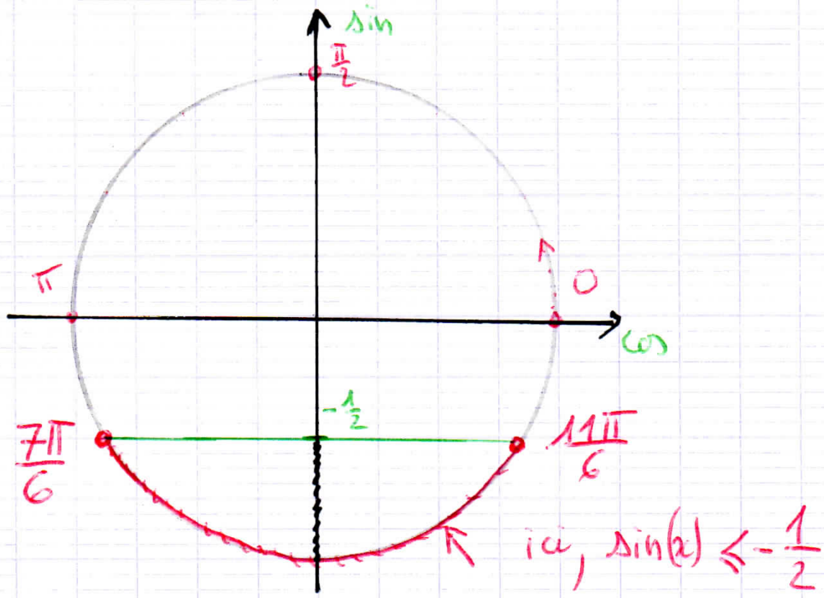
Nous avons donc :

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}}$$

(2pts)

2°) Dessinons le cercle trigonométrique :



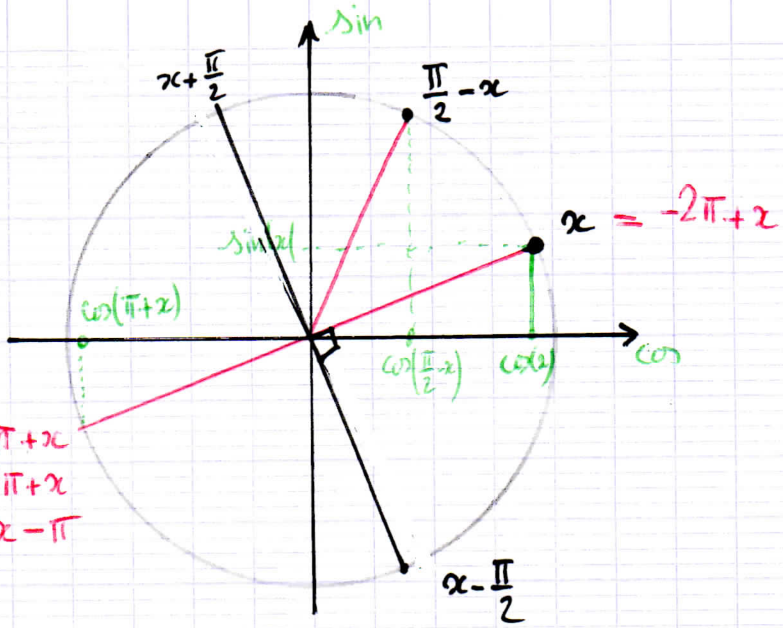
Donc dans $[0;2\pi]$

$$\sin(x) \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x \in \left[\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right]}$$

(2pts)

Sujet B

$\boxed{\text{Exercice 5}}$ (3pts)



$$A = \cos(\pi + x) + 2\cos(-2\pi + x) + 2\cos(3\pi + x)$$
$$= -\cos(x) + 2\cos(x) - 2\cos(x)$$
$$= -\cos(x)$$

$$\boxed{A = -\cos(x)}$$ 1pt

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x + \pi)$$
$$= \sin(x) - \sin(x)$$
$$= 0$$

$$\boxed{B = 0}$$ 1pt

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x - \pi) - \sin(x + \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin(x) - \sin(x) + \sin(x) + \sin(x)$$
$$= 0$$

$$\boxed{C = 0}$$ 1pt