Classe: 1SSI	Date: 31/02/13	**Type**
Devoir n°10		**devoir maison** **pour le 11/2/2013**
Thème: Trigonométrie et second degré		

Exercice 1 : Résolution d'équations.

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $\frac{3x-2}{2x+5}-\frac{2x+5}{3x-2}=0$

b) $x^4-34x^2+225=0$

Exercice 2 : Un problème.

La distance parcourue par une pierre lâchée dans un puits, au bout de t secondes est (en mètres) $\frac{1}{2}gt^2$, où g est l'accélération de la pesanteur (g=9,81 m/s^2).

La distance parcourue par le son au bout de θ secondes est (en mètres) égale à vθ, où v est la vitesse du son (v=340m/s).

1°) On lâche une pierre dans un puits de 85 m de profondeur. Au bout de combien de temps entend-on le bruit de contact de la pierre avec l'eau qui est au fond du puits ?

2°) On ignore la profondeur du puits. On sait que l'on entend le bruit du contact de la pierre avec l'eau qui est au fond du puits 10 secondes après qu'on ait lâché la pierre. Quelle est la profondeur du puits ?

Exercice 3 : Trigonométrie.

1°) On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Placer sur le cercle trigonométrique les points M et N sachant que $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=\alpha$, $(\vec{i},\overrightarrow{ON})=\beta$ et que :

- $\alpha\in]-\pi,0[$ avec $\cos(\alpha)=\frac{1}{3}$
- $\beta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ avec $\sin(\beta)=\frac{3}{5}$

2°) Calculer sin(α) et cos(β).

Exercice 4 : Equation trigonométrique.

1°) Résoudre dans IR l'équation : $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$.

2°) Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

Corrigé du devoir

Exercice n°1

a) $\dfrac{3x-2}{2x+5} - \dfrac{2x+5}{3x-2} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x-2)^2 - (2x+5)^2}{(2x+5)(3x-2)} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{[(3x-2)-(2x+5)][(3x-2)+(2x+5)]}{(2x+5)(3x-2)} = 0$

on a factorisé le numérateur en utilisant : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Cela évite de développer et puis d'utiliser Δ.

$\Leftrightarrow [x-7][5x+3] = 0$

$\Leftrightarrow x-7=0$ ou $5x+3=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x=7}$ ou $\boxed{x=-\frac{3}{5}}$

3pts

---

b) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

- Posons $X = x^2$.

  Avec cette inconnue auxiliaire, l'équation s'écrit :

  $$X^2 - 34X + 225 = 0$$

  On résout cette deuxième équation en calculant Δ.

  $$\Delta = (-34)^2 - 4 \times 225 = 256.$$

  Il y a donc deux solutions X :

  $$\begin{cases} X_1 = \dfrac{34-\sqrt{256}}{2} = 9 \\ X_2 = \dfrac{34+\sqrt{256}}{2} = 25 \end{cases}$$

- On revient à l'inconnue x :

  Puisque $X = x^2$, on a :

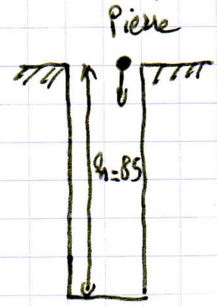
  $x^2 = 9$ ou $x^2 = 25$

  $\Leftrightarrow x = \pm 3$ ou $x = \pm 5$

L'équation de départ a donc 4 solutions : -5 ; -3 ; 3 ; 5

3pts

Exercice 2



1°). Je note t_1 le temps mis par la pierre pour tomber au fond

On a : $\frac{1}{2}gt_1^2 = 85$ donc $t_1^2 = \frac{2\times 85}{g}$

comme $t_1 > 0$: $t_1 = \sqrt{\frac{2\times 85}{g}}$

• Je note t_2 le temps mis par le son pour remonter.

On a : $v.t_2 = 85$ donc $t_2 = \frac{85}{v}$ avec $v = 340\ m/s$

Conclusion : On entend le bruit de la pierre au bout de :

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2\times 85}{g}} + \frac{85}{v}$$ où $g = 9{,}81\ m/s^2$ et $v = 340\ m/s$

Donc $\boxed{t_1 + t_2 \simeq 4{,}41\ s}$

2pts

2°) C'est le même problème, mais on ne connait pas la profondeur du puits.

• Choix des inconnues : h : profondeur du puit

t_1 et t_2 : comme au 1°)

• Mise en équation :

Nous savons que :
$$\begin{cases} * \ \frac{1}{2}gt_1^2 = h & (1) \\ * \ v.t_2 = h & (2) \\ * \ t_1 + t_2 = 10 & (3) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) permettent d'écrire : $\frac{1}{2}gt_1^2 = vt_2$

Donc $t_2 = \frac{gt_1^2}{2v}$

En substituant t_2 dans l'équation (3) on obtient :

$$t_1 + \frac{gt_1^2}{2v} = 10$$

$$\Leftrightarrow 2vt_1 + gt_1^2 = 20v$$

$$\Leftrightarrow \boxed{gt_1^2 + 2vt_1 - 20v = 0}$$ avec $g = 9{,}81$ et $v = 340$

• Résolution : L'équation s'écrit : $9{,}81t_1^2 + 680t_1 - 6800 = 0$

C'est une équation du second degré :

$$\Delta = 729232$$

$\Delta > 0$: Il y a donc deux solutions

$$\underbrace{t_1 = \frac{-680-\sqrt{\Delta}}{2\times 9{,}81}}_{\text{celle-ci est négative, elle ne convient pas :}} \quad \text{ou} \quad t_1 = \frac{-680-\sqrt{\Delta}}{2\times 9{,}81}$$

Donc $t_1 = 8{,}86599\ldots$ (Je garde tous les chiffres en mémoire)

or d'après l'équation (1) : $h = \frac{1}{2} g t_1^2$

je Trouve : $\boxed{h \simeq 385{,}56 \text{ m}}$

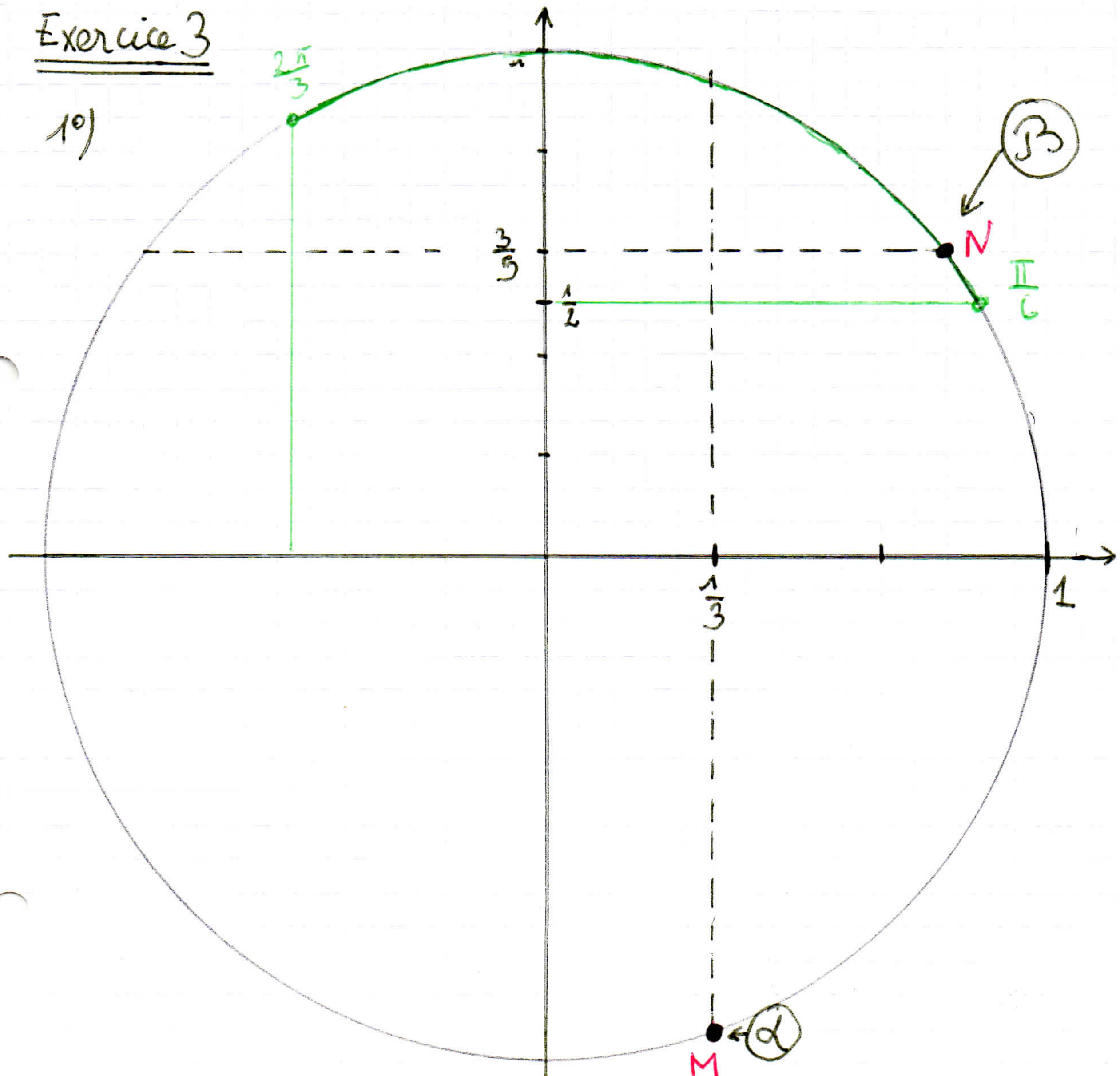
4pts

- Conclusion : **Le puits a une profondeur de 385,56 m**

Remarque : Un calcul litéral permet de trouver $h = \dfrac{v^2 + 10vg - v\sqrt{v^2 + 20vg}}{g}$
(voir en fin de correction)

Exercice 3

1°)



1pt

2°). On sait que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Donc $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

Or $\alpha \in]-\pi ; 0[$, donc $\sin\alpha < 0$

d'où $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\boxed{\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

1,5 pts

• On sait que $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 3$

Donc $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

Donc $\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$

Or d'après 1°) on sait que $\beta \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\beta > 0$

D'où $$\boxed{\cos\beta = \frac{4}{5}}$$

1,5 pts

Exercice n°4

1°) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = 3x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 2k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x = \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases}$$

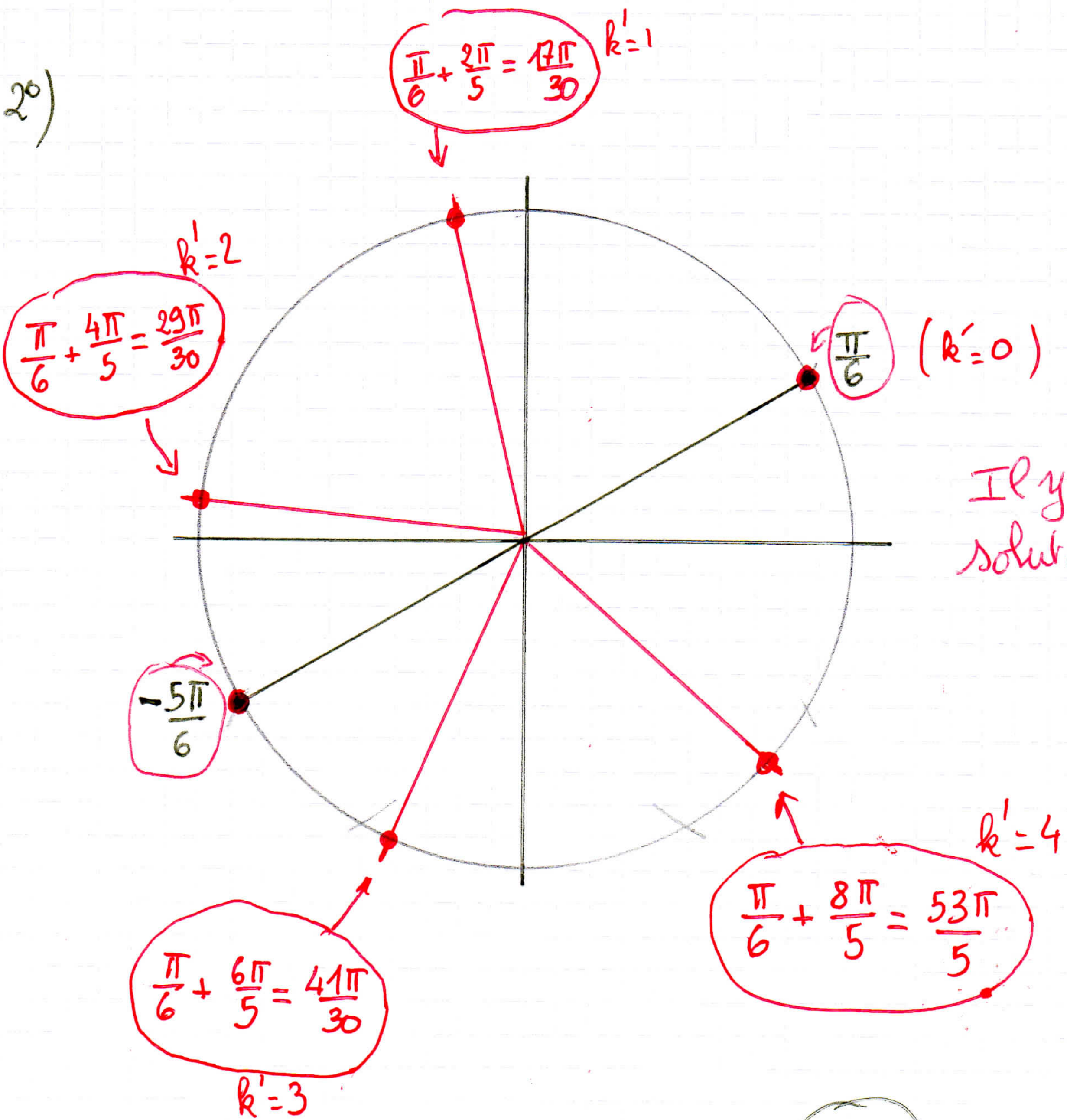
$$\iff \boxed{\begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{6} - 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k'\pi}{5} \end{cases}}$$

← 1 solution sur le cercle ($k=0$)

← 5 solutions sur le cercle ($k'=0, 1, 2, 3, 4$)

3 pts

2°)



Il y a 6 solutions

1 pt

Calcul littéral pour résoudre $g t_1^2 + 2v t_1 - 20v = 0$ (Ex 2, 2°)

$$g t_1^2 + 2v t_1 - 20v = 0$$

C'est une équation du second degré où la seule inconnue est t_1

$$\Delta = (2v)^2 - 4g \times (-20v)$$
$$\Delta = 4v^2 + 4 \times 20vg$$
$$\Delta = 4(v^2 + 20vg) \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{v^2 + 20vg}$$

Comme $\Delta > 0$, on trouve deux solutions

$$t_1 = \frac{-2v - \sqrt{\Delta}}{2g}$$

Cette solution ne convient pas car elle est négative

ou

$$t_1 = \frac{-2v + \sqrt{\Delta}}{2g} = \frac{-2v + 2\sqrt{v^2 + 20vg}}{2g}$$

celle-ci est positive !

Donc $$\boxed{t_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 20vg}}{g}}$$

(on a simplifié par 2)

On cherche h, pour cela on réutilise l'équation (1) :

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{-v + \sqrt{v^2 + 20vg}}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{1}{2} g \, \frac{v^2 - 2v.\sqrt{v^2 + 20vg} + v^2 + 20vg}{g^2}$$

$$h = \frac{2v^2 + 20vg - 2v.\sqrt{v^2 + 20vg}}{2g}$$

on a simplifié par 2

$$\boxed{h = \frac{v^2 + 10vg - v\sqrt{v^2 + 20vg}}{g}}$$