Chapitre : Suites numériques

A-Notion de suite numérique

1-Définition

Définition : Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres. Elle a un premier terme, un deuxième terme, etc.

Exemples :

1. La suite des multiples de 7: 0, 7, 14, ...
2. La suite des nombres entiers impairs : 1,3, 5, 7, . . .
3. La suite définie par $u_n=n^2+1$.

u_0 =_ _ _ _ _ _.

u_1 =_ _ _ _ _ _.

u_2 =_ _ _ _ _ _.

Notations :

- On utilise généralement les lettres u, v, w, . . . pour désigner une suite.
- u_n est appelé terme d'indice n (ou de rang n) de la suite.
- La suite dans sa globalité est notée u ou u_n.

Remarque : Dans beaucoup de cas, on commencera l'indexation à l'indice zéro. Dans ce cas :

u_0 est le premier terme ;

u_1 est le deuxième terme ;

u_2 est le troisième terme ; etc.

Il ne faut donc pas confondre le terme d'indice n de la suite et son n-ième terme.

2-Modes de génération d'une suite

Il existe essentiellement deux procédés pour définir des suites.

Procédé 1 : A l'aide d'une formule explicite

Soit u_n la suite définie par: $u_n=-n^2+n-2$.

On a : $u_0=-0^2+0-2=2$;

u_1 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ;

u_2 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ;

u_3 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ;

etc....

Procédé 2 : A l'aide d'une formule de récurrence.

Soit (v_n) la suite de premier terme v_0 = 5 et dont le terme suivant est obtenu en ajoutant 3 puis en divisant par 2.

On a: $v_1=\dfrac{v_0+3}{2}=\dfrac{5+3}{2}=4$ $\qquad v_2=\dfrac{v_1+3}{2}=$.

v_3 =

et, plus généralement v_{n+1} =

Remarques :

1. Dans ce cas, le terme d'indice n est calculé à partir du terme précédent. On calcule donc les termes de (v_n) de proche en proche (avant de calculer v_5 il faut déjà avoir calculé v_4 , v_3 , etc.). Une telle relation est appelée relation de récurrence.
2. On définira la suite (v_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} v_0= 5 \\ v_{n+1}=\dfrac{v_n+3}{2} \end{cases}$$

3-Représentation graphique d'une suite

Définition : L'ensemble des points de coordonnées (n, u_n) constitue la représentation graphique de la suite (u_n) .

Remarque : On ne relie pas les points, puisque seuls les nombres entiers ont une image !

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

1°) Déterminer les 5 premiers termes de cette suite.

u_0 = _____________.

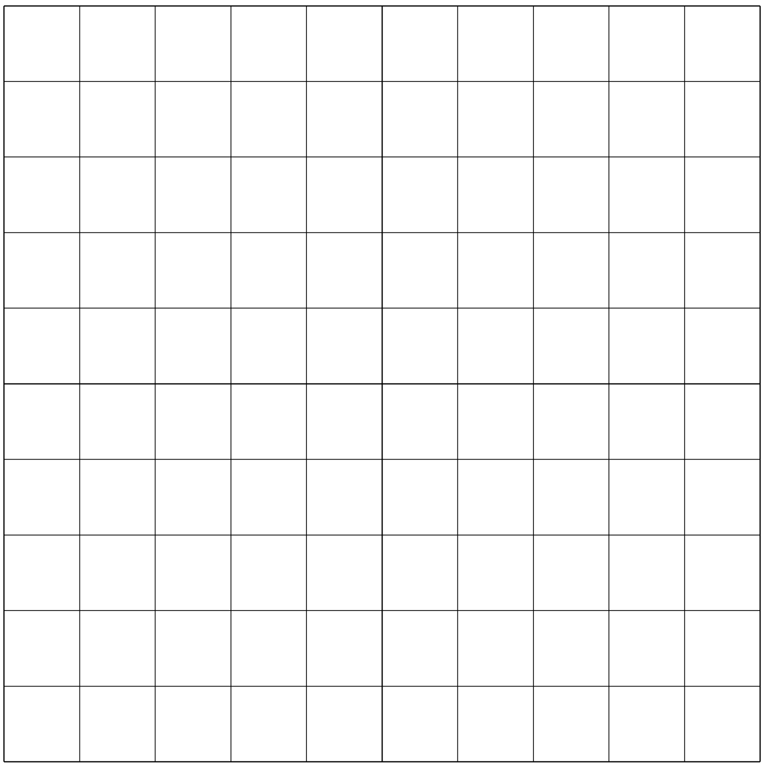
u_1 = _____________.

u_2 = _____________.

u_3 = _____________.

u_4 = _____________.

2°) Représenter graphiquement les 5 premiers termes de cette suite sur le graphique suivant.



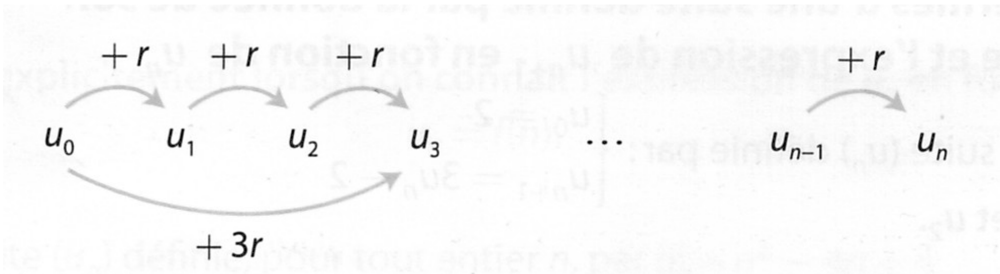
B- Suites arithmétiques

1-Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé raison de la suite.



Exemples :

1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, . . . est arithmétique de raison 5.
2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

   est arithmétique de raison (−3).

3. Soit u la suite définie par $u_n = 3n - 2$.

   $u_{n+1} - u_n = 3(n+1)-2-(3n-2) = 3n+3-2-3n+2=3$

   La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.

4. Soit v la suite définie par $v_n = n^2$.

   Cette suite est-elle arithmétique ?

Remarque : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r.
On a donc :

$$u_{n+1}=u_n+r$$

Le réel r est alors appelé raison de la suite.

2-Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

On a : $u_1=u_0+r$

$u_2=u_1+r=(u_0+r)+r=u_0+2r$

u_3 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_n=u_0+nr$$

Remarques :

1. En particulier, la représentation graphique d'une suite arithmétique est formée de points alignés.

2. Plus généralement, si (un) est une suite arithmétique de raison r et si u_1 est le premier terme,

on a : $u_n=u_1+(n-1)r$

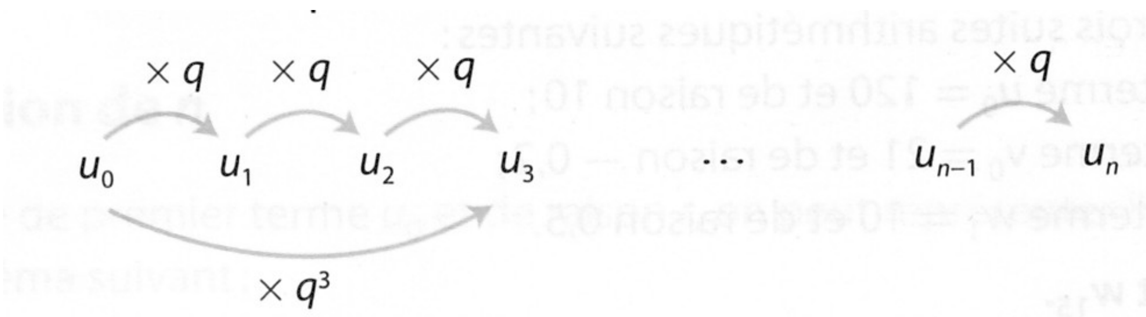
C- Suites géométriques

1-Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (un) est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé raison de la suite.



Exemples :

1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, ... est géométrique de raison 2.
2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2} u_n \end{cases}$$

est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$

3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison (−1).