Exemple 4

(ici la suite auxiliaire est arithmétique)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+7u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 0$, alors $u_n = 0$. En déduire que pout tout n, $u_n \neq 0$.
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2-u_n}{u_n}$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire une expression de u_n en fonction de n.

1°) $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+7u_n}$

$u_0 = \dfrac{1}{2}$

$u_1 = \dfrac{2u_0}{2+7u_0} = \dfrac{2\times\frac{1}{2}}{2+\frac{7}{2}} = \dfrac{2}{4+7} = \dfrac{2}{11}$

$u_2 = \dfrac{2u_1}{2+7u_1} = \dfrac{2\times\frac{2}{11}}{2+\frac{14}{11}} = \dfrac{4}{22+14} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

$u_3 = \dfrac{2u_2}{2+7u_2} = \dfrac{2\times\frac{1}{9}}{2+\frac{7}{9}} = \dfrac{2}{18+7} = \dfrac{2}{25}$

$u_1 - u_0 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{7}{22}$

$u_2 - u_1 = \dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{11} = -\dfrac{7}{99}$

Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$: La suite n'est pas arithmétique.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{2}{11}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{11}\times 2 = \dfrac{4}{11}$

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{11}} = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{11}{2} = \dfrac{11}{18}$

Donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$: La suite (u_n) n'est pas géométrique.

2°) Montrons que : $(u_{n+1} = 0) \Rightarrow (u_n = 0)$

$u_{n+1} = 0$

donc $\dfrac{2u_n}{2+7u_n} = 0 \Rightarrow 2u_n = 0 \Rightarrow u_n = 0$

CQFD.

Comme $(u_{n+1} = 0) \Rightarrow (u_n = 0)$, donc la contraposée est vraie, à savoir :

$(u_n \neq 0) \Rightarrow (u_{n+1} \neq 0)$

Or $u_0 = \dfrac{1}{2} \neq 0$ donc $u_1 \neq 0$

Ainsi : $u_0 \neq 0 \Rightarrow u_1 \neq 0 \Rightarrow u_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ etc... $\Rightarrow u_n \neq 0$.

(ceci est vrai quel que soit n)

Donc pour tout n, $u_n \neq 0$.

3°) $v_n = \dfrac{2-u_n}{u_n}$

Donc $v_0 = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4-1}{1} = 3$

$$v_1 = \frac{2-u_1}{u_1} = \frac{2-\frac{2}{11}}{\frac{2}{11}} = \frac{22-2}{2} = 10$$

$$v_2 = \frac{2-u_2}{u_2} = \frac{2-\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}} = \frac{18-1}{1} = 17$$

$$v_3 = \frac{2-u_3}{u_3} = \frac{2-\frac{2}{25}}{\frac{2}{25}} = \frac{50-2}{2} = 24$$

Montrons que (v_n) est arithmétique :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2-u_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2-u_n}{u_n}$$

$$= \frac{2-\frac{2u_n}{2+7u_n}}{\frac{2u_n}{2+7u_n}} - \frac{2-u_n}{u_n}$$

$$= \frac{2(2+7u_n)-2u_n}{2u_n} - \frac{(2-u_n)}{u_n}$$

$$= \frac{2+7u_n-u_n}{u_n} - \frac{(2-u_n)}{u_n}$$

$$= \frac{2+6u_n-(2-u_n)}{u_n}$$

$$= \frac{7u_n}{u_n} = 7$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 7$.
La suite v_n est donc arithmétique de raison 7.

4°) Comme (v_n) est arithmétique de raison 7 et que $v_0 = 3$, donc :

$$v_n = v_0 + nr = 3 + 7n$$

On en déduit u_n en fonction de n :

En effet :

$$v_n = \frac{2 - u_n}{u_n}$$

Donc $v_n \cdot u_n = 2 - u_n$

$\Rightarrow v_n \cdot u_n + u_n = 2$

$\Rightarrow u_n(v_n + 1) = 2$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{2}{v_n + 1}$

or $v_n = 3 + 7n$ et donc

$$\boxed{u_n = \frac{2}{3 + 7n + 1} = \frac{2}{4 + 7n}}$$

Vérification (facultatif)

avec cette formule, on retrouve les résultats du 1°).

$$u_0 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{2}{4+7} = \frac{2}{11}$$

$$u_2 = \frac{2}{4+14} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$u_3 = \frac{2}{4 + 7 \times 3} = \frac{2}{4+21} = \frac{2}{25}$$