

Chapitre 3: FONCTION DE RÉFÉRENCE

I] Fonction logarithme népérien

1) Définition et premières propriétés

Définition: La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$

Premières propriétés:

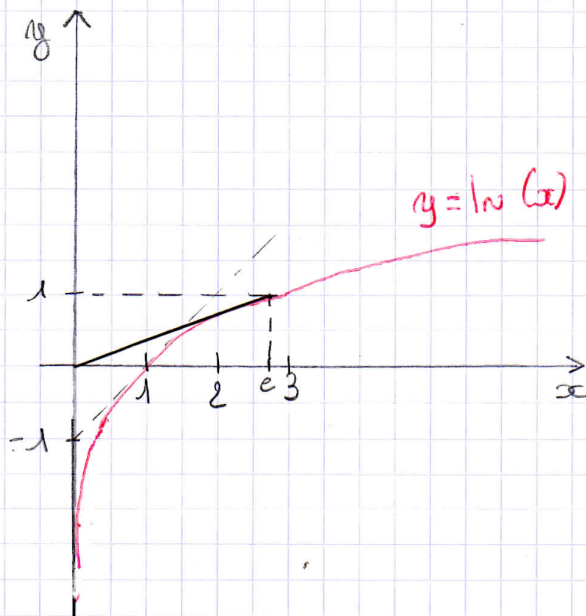
* $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$

* $\ln(1) = 0$

* $[\ln(x)]' = \frac{1}{x} > 0$

* $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2) Représentation graphique



$$e \approx 2,718$$

$$\ln(e) = 1$$

On a les résultats:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Croissance comparée

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^\alpha} \right) = 0 \quad , \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0$$

$(\alpha > 0) \qquad \qquad \qquad (\alpha > 0)$

On dit souvent que les fonctions puissances (x^α) l'emportent sur le logarithme en $+\infty$ et en 0^+ .

3) Propriétés algébriques

a et b sont deux réels strictement positifs.

$$\bullet \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\bullet \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\bullet \ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$$

$$\bullet \ln(1) = 0$$

$$\bullet \ln(e) = 1$$

$$\left[\ln(u) \right]' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 1

① Exprimer en fonction de $\ln$ (2) les réels suivants :

$$a = \ln 8 ; b = \ln\left(\frac{1}{16}\right) ; c = \ln(\sqrt{81})$$

② Calculer : $\ln(e\sqrt{e}) + \ln(e^2) - \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

③ $f(x) = x \cdot \ln(x)$

Calculer $f\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f(\sqrt{e})$

$$\textcircled{1} \text{ a) } \ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$$

$$\text{b) } \ln\left(\frac{1}{16}\right) = -\ln(2^4) = -4\ln(2)$$

$$\text{c) } \ln(\sqrt[3]{8}) = \ln(8^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \ln(8) = \frac{3\ln(2)}{3}$$

$$\textcircled{2} \ln(e\sqrt{e}) + \ln(e^2) - \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$$

$$= \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) + 2\ln e + \ln(e^3)$$

$$= \frac{3}{2}\ln(e) + 2 \times 1 + 3\ln(e)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{6}{2}$$

$$= \frac{13}{2}$$

$$\textcircled{3} f(x) = x \cdot \ln(x)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-\ln(e)}{e} = -\frac{1}{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \cdot \ln(\sqrt{e})$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \cdot \ln(e^{\frac{1}{2}})$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$