Brevet de Technicien Supérieur
Groupement A1

MATHÉMATIQUES

SESSION 2011

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
ÉLECTROTECHNIQUE	2	3
GÉNIE OPTIQUE	3	3

Matériel autorisé :
Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

circulaire 99-186 du 16 novembre 1999

Document à rendre avec la copie :
Document réponse ....page 8/8

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 (10 points)

Partie A

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité 0,1 et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité 0,1.
Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.
On envoie le signal 00.
On admet que les erreurs de transmission sont des événements aléatoires indépendants les uns des autres.
On considère les événements suivants :

- E_1 : « les deux chiffres sont modifiés »
- E_2 : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- E_3 : « aucun chiffre n'est modifié »
- E_4 : « au moins un des chiffres est modifié »

Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte ou ***l'absence de réponse n'enlève pas de point.***

1. La probabilité de l'événement E_1 est égale à :

   - $0,01$
   - $0,99$
   - $0,09$
   - $0,81$

2. Si l'événement E_2 est réalisé, le signal reçu est :

   - 00
   - 01
   - 10
   - 11

3. La probabilité de l'événement E_2 est égale à :

   - $0,19$
   - $0,81$
   - $0,09$
   - $0,90$

4. La probabilité de l'événement E_3 est égale à :

- $0,01$
- $0,99$
- $0,09$
- $0,81$

5. La probabilité de l'événement E_4 est égale à :

- $0,19$
- $0,20$
- $0,11$
- $0,91$

Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à émettre une chaîne constituée de 10 fois le chiffre 1 et à observer la chaîne reçue. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque chaîne ainsi reçue, associe le nombre d'erreurs de transmission, c'est-à-dire le nombre de 0 obtenus.

   On rappelle que la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est 0,1.

   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.

   (b) Calculer à $0,001$ près la probabilité qu'il y ait exactement une erreur de transmission.

   (c) Montrer que la probabilité qu'il y ait au plus une erreur de transmission est égale à 0,74 à 0,01 près.

2. Estimant que la qualité des transmissions n'est pas assez bonne, les techniciens procèdent à quelques réglages afin de réduire les « bruits » à l'origine des erreurs. La probabilité qu'un chiffre soit mal transmis devrait ainsi être fortement diminuée.

   Effectivement, à l'issue des réglages, on constate que la proportion de chiffres mal transmis est égale à 0,002.

   (a) On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de chiffres mal transmis dans une chaîne de 1000 chiffres.
   On considère que la variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Justifier que $\lambda = 2$.

   (b) Calculer à $0,001$ près la probabilité qu'il y ait au moins une erreur de transmission parmi les 1000 chiffres envoyés.

Partie C

La transmission des chiffres binaires est assurée par un signal électrique carré. Les impulsions supérieures à 2 volts représentent le chiffre 1, les autres le chiffre 0. Ne pouvant affiner davantage leurs réglages, les techniciens admettent que les erreurs de transmission restantes sont dues à un « bruit aléatoire ». Celui-ci est modélisé par un signal de tension aléatoire U, exprimée en volts. On admet que U suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type σ.

1. Pour envoyer les chiffres 1, on envoie des impulsions de 4 volts. Ces dernières sont modifiées par le bruit aléatoire. La tension reçue est ainsi égale à $4+U$.

   Dans cette question, on suppose que $\sigma = 0,7$.

   (a) Montrer que la probabilité que cette tension représente le chiffre 1 est égale à la probabilité que U soit supérieure à -2.

   (b) Calculer cette probabilité à $0,001$ près.

2. Quelle condition doit-on imposer à l'écart type σ pour que la proportion d'erreurs de transmission d'un chiffre 1 soit inférieure à $0,1\,\%$, c'est-à-dire pour que :

$$P(U < -2) < 0,001\,?$$

   Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou non aboutie sera prise en compte.

Exercice 2 (10 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
Le but de la partie A est de calculer le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, puis de s'intéresser à la valeur efficace de cette fonction sur une période.
Dans la partie B, il s'agit de retrouver la représentation graphique d'une fonction à partir de son développement en série de Fourier puis de définir cette fonction.

Partie A

On considère la fonction f périodique, de période 2, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} f(t) = 0,5t + 0,5 & \text{si } -1 < t < 1 \\ f(1) = 0,5. \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier de la fonction f s'écrit :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right).$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$ en utilisant la figure 1 du document réponse.
2. Démontrer que $a_0 = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Préciser la valeur de la pulsation ω.

   (b) En utilisant une intégration par parties, calculer b_1.

   On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

   $$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

4. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel t par $g(t) = f(t) - 0,5$.

   (a) Tracer la représentation graphique de la fonction g sur la figure 2 du document réponse.

   (b) Quelle propriété de symétrie observe-t-on sur la représentation graphique de la fonction g ?

   (c) En comparant les coefficients de Fourier des fonctions f et g, montrer que $a_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.

5. On rappelle que la valeur efficace de la fonction f sur une période est le nombre réel positif, noté f_{eff}, défini par :

   $$f_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (f(t))^2\, dt.$$

   Démontrer que $f_{eff}^2 = \dfrac{1}{3}$.

6. On rappelle la formule de Parseval :

$$f_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de f_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est-à-dire :

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

(a) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de P, puis de $\frac{P}{f_{eff}^2}$.

(b) En déduire, en pourcentage, l'erreur commise quand on remplace f_{eff}^2 par P.

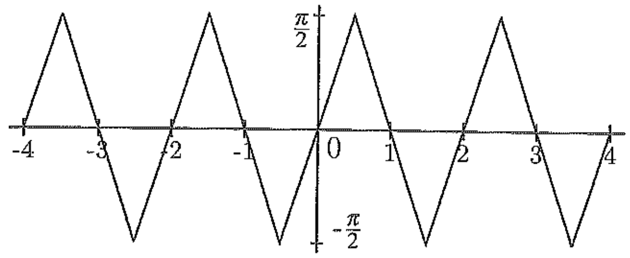
Partie B

Soit h la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels, périodique, de période 2, dont le développement en série de Fourier est :

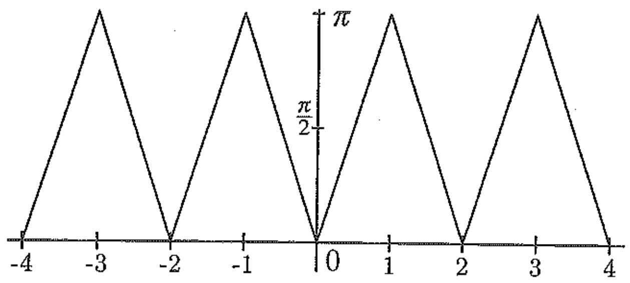
$$S_h(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left((2p+1)\,\pi t\right).$$

1. Déterminer la parité de la fonction h.
2. Sur l'annexe sont proposées quatre représentations graphiques.
   Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4\,;4]$? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer $h(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.

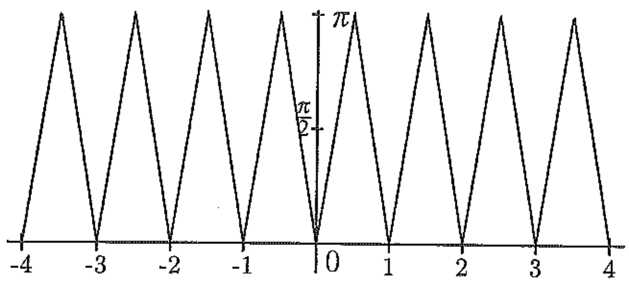
Annexe



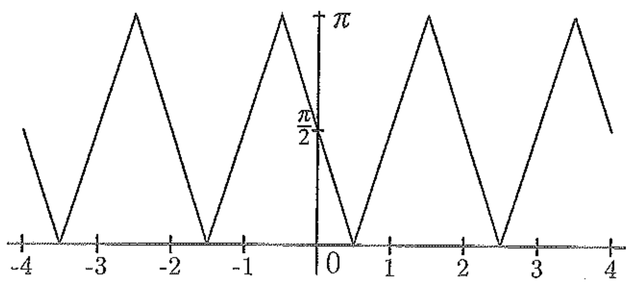
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Document réponse à joindre à la copie

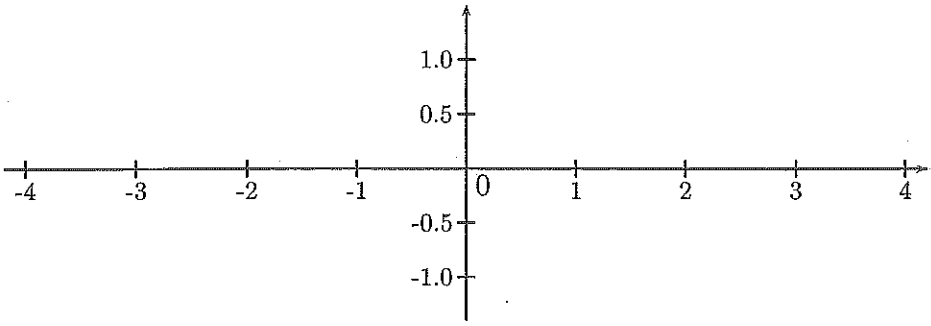


Figure 1 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

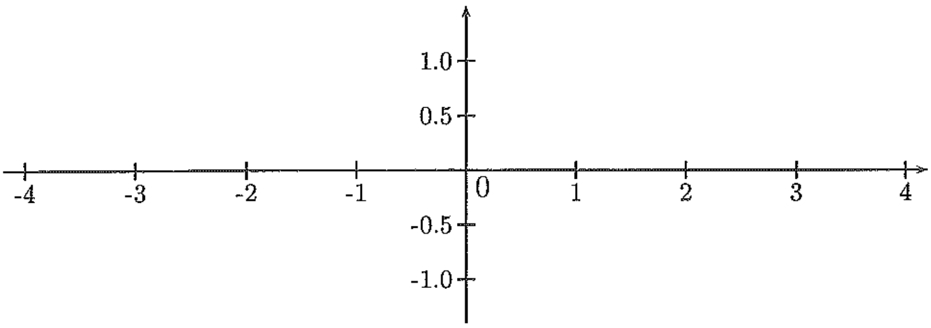


Figure 2 : représentation graphique de la fonction g (à compléter)