1^e ST2S – Généralités sur les fonctions – rappels

I- Vocabulaire

$f : x \longmapsto -x^2 + 5$ se lit « **f est la fonction qui à** un nombre **x associe** le nombre **$-x^2 + 5$** »

On peut dire aussi : **« f est la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 5$ »**

L'ensemble de définition de f, noté souvent **Df**, est l'ensemble des valeurs que peut prendre x. Dans cet exemple, x peut valoir n'importe quel réel. On a Df = $\mathbb{R}$

On dira alors « f est la fonction définie **sur $\mathbb{R}$** par $f(x) = -x^2 + 5$ »

L'image d'un nombre x_0 par la fonction f est le nombre $\boxed{f(x_0)}$.
Exemple ici : l'image de -4 par f est le nombre $f(-4) = -(-4)^2 + 5 = -16 + 5 = -11$

Un nombre ne peut pas avoir plus d'une image par une fonction f.

Remarque : un nombre qui appartient à l'ensemble de définition de f admet une et une seule image par f. Un nombre qui n'appartient pas à l'ensemble de définition de f n'admet pas d'image par f.

Les antécédents d'un nombre y_0 par f sont les x **solutions de l'équation $f(x) = y_0$**.
Dans l'exemple : recherchons les antécédents de 1 par f.
On résout $\boxed{f(x) = 1} \Leftrightarrow -x^2 + 5 = 1 \Leftrightarrow -x^2 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 2 \text{ ou } x = -2}$
Le nombre 1 admet deux antécédents par f qui sont 2 et -2

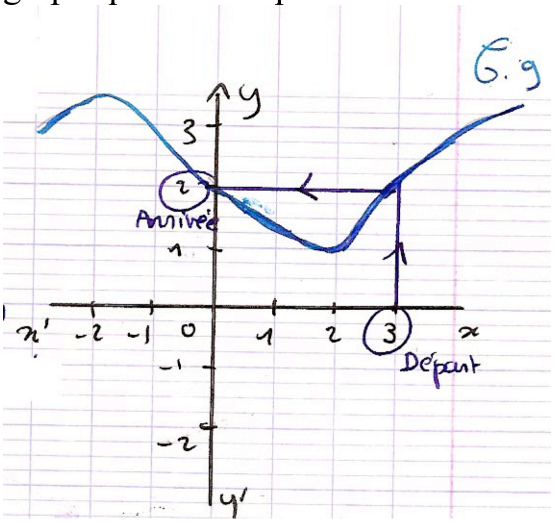
Remarque : un nombre peut admettre 0, 1 ou plusieurs (même une infinité) d'antécédents par une fonction.

La **courbe représentative d'une fonction** f **dans un repère**, notée souvent **Cf**, est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont (x ; f(x)), x appartenant à l'ensemble de définition.

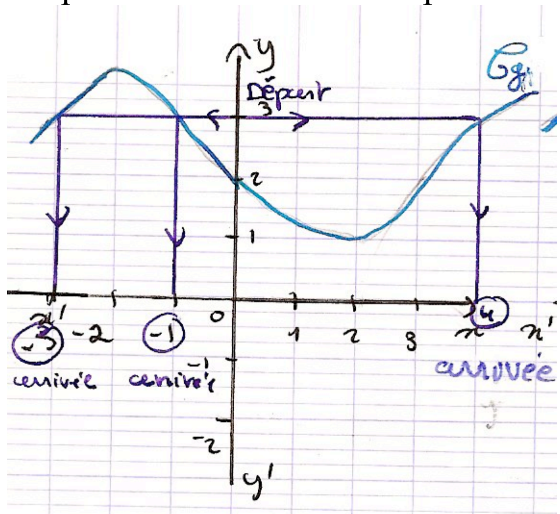
Un point M de coordonnées (x_0 ; y_0) appartient à la courbe représentative de f si et seulement si y_0 est l'image de x_0 par la fonction f.

Exemple avec $f(x) = -x^2 + 5$:
Le point A (1 ; 4) appartient à Cf, car $4 = -1^2 + 5$ (4 est l'image de 1 par f)
Mais le point B (2 ; 5) n'appartient pas à Cf car $5 \neq -2^2 + 5$ (5 n'est pas l'image de 2 par f)

►Comment déterminer les images ou les antécédents d'un nombre par une fonction sur un graphique ? Exemple avec une fonction g donnée par sa courbe dans un repère :



Lecture de l'image de 3 par g :
g(3) = 2



Les antécédents de 3 par g sont − 3, − 1 et 4

II- Variations, extrema, tableau de variations

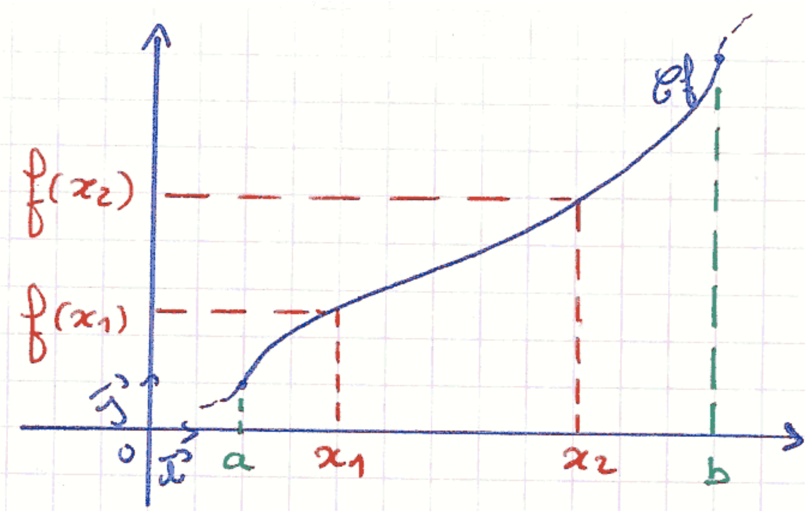
1- Fonction croissante ou strictement croissante sur un intervalle.

Une **fonction** est dite « **croissante** » sur un intervalle I lorsqu'elle **conserve l'ordre** sur cet intervalle.

Traduction numérique :

Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
(x_1 est plus petit que x_2 si et seulement si $f(x_1)$ est plus petit que $f(x_2)$)

Et pour une fonction strictement croissante :
Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Ici : f est strictement croissante sur l'intervalle [a,b].
Sa courbe « monte » de gauche à droite. Pour tous x_1 et $x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

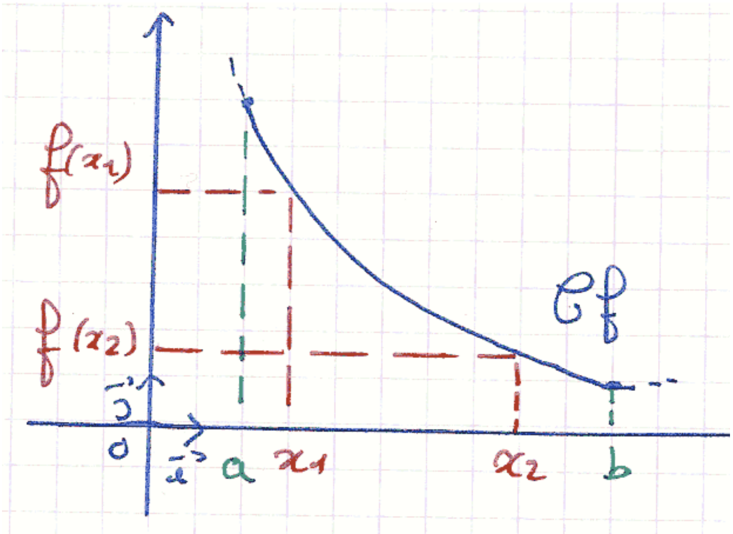
2- Fonction décroissante ou strictement décroissante sur un intervalle.

Une **fonction** est dite « **décroissante** » sur un intervalle I lorsqu'elle **inverse l'ordre** sur cet intervalle.

Traduction numérique :

Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
(x_1 est plus petit que x_2 si et seulement si $f(x_1)$ est plus grand que $f(x_2)$)

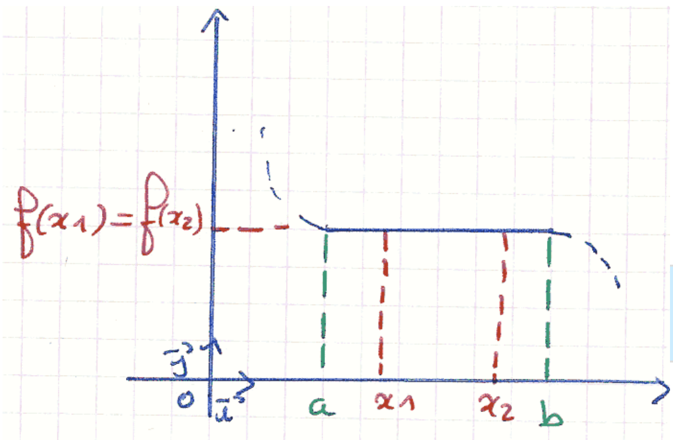
Et pour une fonction strictement décroissante :
Pour tous x_1 et x_2 de I
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Ici : f est strictement croissante sur l'intervalle [a,b].
Sa courbe « descend » de gauche à droite. Pour tous x_1 et $x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3- Fonction constante sur un intervalle.

Une fonction est constante sur un intervalle I lorsque, pour tous x_1 et $x_2 \in$ I, $f(x_1) = f(x_2)$
(Toutes les images de x sont les mêmes, quel que soit $x \in$ I)



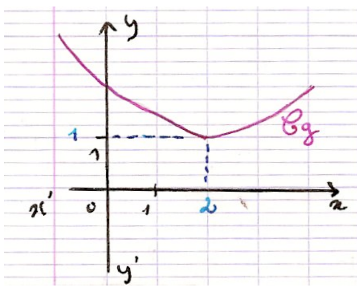
Ci-contre, la fonction f est constante sur l'intervalle [a,b]

Sa courbe est « horizontale » entre les abscisses a et b.

Pour tous x_1 et x_2 de [a,b],
$f(x_1) = f(x_2)$

III- Extrema (pluriel du mot extremum qui désigne un maximum ou un minimum)

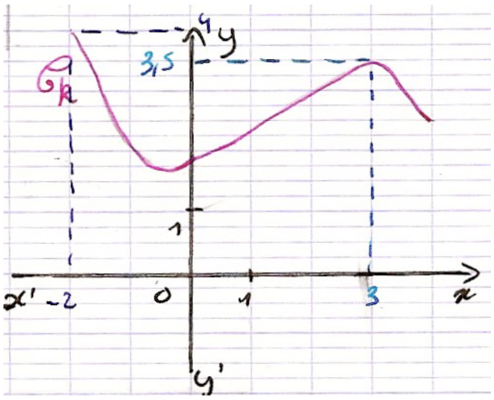
On dit qu'une fonction admet un **extremum local** en x_0 lorsqu'elle change de sens de variations en x_0.
Si elle est croissante puis décroissante, c'est un **maximum local**.
Si elle est décroissante puis croissante, c'est un **minimum local**



Exemple :
Ici, la fonction g admet un minimum local qui est 1 pour $x = 2$

Un **maximum absolu** est la plus grande valeur prise par f(x) (= la plus grande image possible) lorsque x parcourt l'ensemble de définition de f.

Un **minimum absolu** est la plus petite valeur prise par f(x) lorsque x parcourt l'ensemble de définition



Exemple :
Ici, k (définie sur [−2 ;4]) admet un *maximum local* de 3,5 atteint pour x = 3, mais son *maximum absolu* est 4, qui est atteint pour x = −2

III- Tableau de variations.

Un tableau de variations synthétise *l'ensemble de définition*, les *extrema locaux* et *absolus*, et *les variations*.